



CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
MATEMATICAS A.C.

*GENERACIÓN DE MODELOS CONTINUOS A TROZOS
EN PROBLEMAS GEOFISICOS INVERSOS*

TESIS

que como requisito parcial para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

orientación

Ciencias de la computación

presenta

Hugo Homero Hidalgo Silva

Codirectores de tesis:

Dr. José Luis Marroquín Zaleta

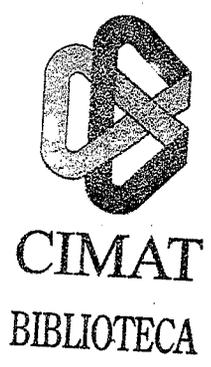
Dr. Enrique Gómez Treviño.

Guanajuato, Gto. Diciembre de 1999

TE
75

Contenido

Contenido	iii
Índice de Tablas	v
Índice de Figuras	vi
Resumen	xi
Agradecimientos	1
Introducción	2
1 Problemas de Inversión Electromagnéticos	6
1.1 Método Magnetoteléurico	6
1.1.1 Modelos 1D en capas	12
1.2 Técnicas de solución para el problema inverso MT	15
1.2.1 Modelos de pocos parámetros	15
1.2.2 Modelos sobreparametrizados	21
1.3 Método de Corriente Directa	32
1.3.1 Técnicas de solución	38
2 Problemas mal planteados y técnicas de regularización	40
2.1 Introducción	40
2.2 Métodos determinísticos	43
2.2.1 Problemas lineales	43
2.2.2 Modelos con discontinuidades	48
2.2.3 Regularización determinística no-lineal	50
2.3 Formulación probabilística	53
2.3.1 Estimación Bayesiana	53



2.3.2	Consideraciones sobre la no-linealidad del operador	56
2.3.3	Modelos con discontinuidades	59
2.4	Generación de modelos continuos a trozos en problemas de inversión .	65
2.4.1	El algoritmo Global	66
2.4.2	Algoritmos locales	71
3	Inversión de datos 1D con modelos continuos a trozos	78
3.1	Procesado de líneas discreto	78
3.1.1	Aplicación al método MT	79
3.1.2	Mejoras al algoritmo	80
3.1.3	Aplicación a datos reales	83
3.1.4	Aplicación al método CD	85
3.1.5	Corrección de estática	86
3.2	Procesado de líneas continuo	89
4	Modelos acoplados para la inversión de datos 2D	93
4.1	Introducción	93
4.2	Modelos acoplados	94
4.2.1	Aplicación al método MT	97
4.2.2	Aplicación al método CD	104
5	Conclusiones y recomendaciones	116
	Bibliografía	118

Índice de Tablas

2.1	Iteraciones y tiempos de ejecución para los tres algoritmos, con $\lambda = 250$.	76
3.1	Modelo usado para generar datos	79

Índice de Figuras

1.1	Modelo de un medio compuesto por capas horizontales	7
1.2	Modelo para un hemi-espacio uniforme	11
2.1	Algoritmo de regularización por el método variacional	50
2.2	Sistema de vecindades del pixel s en la malla S^P (círculos), y del sitio $\langle r, t \rangle$ en la malla de bordes S^E (“+”).	61
2.3	Algoritmo de regularización linearizando el funcional directo	67
2.4	Modelo obtenido por el algoritmo Occam para el caso MT.	68
2.5	Datos de resistividad aparente para el modelo de la figura 2.4	69
2.6	Datos de fase para el modelo de la figura 2.4	69
2.7	Algoritmo Global LP.	70
2.8	Modelo obtenido por el algoritmo Global LP	71
2.9	Algoritmo local no lineal LP.	72
2.10	Modelo obtenido por el algoritmo local no lineal LP	74
2.11	Modelo obtenido por el algoritmo local lineal LP	76
3.1	Comparación del error de ajuste contra el número de iteraciones para el algoritmo local LP, con $\lambda = 250$, $\alpha = 1$ en un caso y $\alpha = 1.4$ en el otro.	80
3.2	Modelos producidos por el algoritmo local lineal con $\lambda = 250$ en un caso y λ decreciente de 10,000 a 10 en el otro, para $\alpha = 1.0$, en ambos casos.	82

3.3	Modelos producidos por Occam, el algoritmo local lineal con $\lambda = 200$ en un caso y λ decreciente de 500 a 10 en el otro, para $\alpha = 1.4$, además se presenta el modelo de Jones y Hutton.	83
3.4	Ajuste a los datos de resistividad aparente (a) y fase (b) de COPROD.	84
3.5	Modelo sintético usado para obtener datos de prueba vs. modelo obtenido por el algoritmo local lineal.	85
3.6	Datos sintéticos con ruido Gaussiano de 1% y ajuste obtenido por el algoritmo local lineal.	86
3.7	Datos sintéticos con ruido Gaussiano de 1% y ajuste obtenido por el algoritmo local lineal, incluyendo los factores de desplazamiento.	88
3.8	Modelo sintético contra el modelo obtenido cuando los datos están afectados por desplazamientos de estática y éstos son estimados mediante el algoritmo de inversión.	89
3.9	Modelo sintético contra el modelo obtenido cuando los datos están afectados por desplazamientos de estática y no se estiman los desplazamientos.	90
3.10	Datos sintéticos con ruido Gaussiano de 5% incluyendo los factores de desplazamiento, contra el ajuste obtenido por el modelo de el algoritmo local lineal.	91
3.11	Modelo sintético contra el modelo obtenido cuando los datos están afectados por desplazamientos de estática y ruido Gaussiano de 5%.	92
3.12	Modelo real contra los modelos obtenidos por los algoritmos CLP y local lineal, para los datos sintéticos MT de las figuras 2.5 y 2.6.	92
4.1	(a) La malla dual, los círculos representan conexiones entre modelos mediante la variable binaria l^H , los cuadros representan enlaces verticales, usando la variable binaria l^V . (b) líneas verticales, y (c) conexiones laterales. Los símbolos vacíos denotan que las variables de enlace no están activadas.	95

4.2	Modelo usado para generar datos sintéticos MT. La distancia entre los sitios 1 y 2 es de 2 km.	98
4.3	Modelo obtenido mediante el algoritmo de inversión que considera modelos acoplados. Los datos sintéticos Z_{eff} se obtuvieron a partir del modelo de la figura 4.2	99
4.4	Modelo obtenido de datos sintéticos TE por el algoritmo Occam2.0 .	100
4.5	Modelo desarrollado a partir de datos sintéticos TM , sin incluir en el algoritmo de inversión la corrección por corrimiento estático.	102
4.6	Modelo obtenido de los datos sintéticos TM , corrigiendo el desplazamiento estático.	103
4.7	Modelo obtenido a partir de los datos sintéticos Z_{eff} , corrigiendo el desplazamiento estático.	104
4.8	Modelos desarrollados de los datos sintéticos Z_{eff} por el algoritmo CLP acoplado. En este caso el modelo sintético es el mostrado en la figura 4.2 sin la anomalía somera.	105
4.9	Modelo obtenido a partir de los datos COPROD2, usando Z_{TE} para los datos corregidos por Jones. La distancia entre los sitios 1 y 2 es de 1.4 km	106
4.10	Modelo desarrollado a partir de los datos COPROD2, usando Z_{TE} . En el proceso de estimación se incluyeron los desplazamientos estáticos. .	107
4.11	Modelo desarrollado de los datos COPROD2, usando Z_{TE} por el algoritmo CLP acoplado, con los datos corregidos por Jones.	108
4.12	Modelo desarrollado de los datos COPROD2, usando Z_{TE} , por el algoritmo CLP acoplado, corrigiendo el desplazamiento por estática. . .	109

4.13	Modelo sintético usado para generar curvas de resistividad aparente 1D CD para los sitios mostrados. Los sitios se encuentran localizados en -2000 , 0 y $2000m$. La escala para la resistividad es logarítmica en $\Omega - m$. El modelo no se encuentra a escala horizontal, para mostrar los pequeños bloques conductivos que se usaron para producir desplazamientos por estática.	110
4.14	Modelos desarrollados a partir de los datos generados con el modelo sintético de la Figura 4.13.	111
4.15	Datos y respuesta correspondiente 1D para el sondeo sintético en el sitio 1 del modelo de la figura 4.13.	111
4.16	Modelo sintético usado para generar curvas de resistividad aparente 1D CD para los sitios mostrados. Los sitios se encuentran localizados en -2000 , 0 y $2000m$. La escala para la resistividad es logarítmica en $\Omega - m$. El modelo no se encuentra a escala horizontal, para mostrar los pequeños bloques conductivos que se usaron para producir desplazamientos por estática.	112
4.17	Modelos desarrollados a partir de los datos generados con el modelo sintético de la figura 4.16.	112
4.18	Datos y respuesta correspondiente 1D para el sondeo sintético en el sitio 1 del modelo de la figura 4.16.	113
4.19	Modelos desarrollados para la línea 1 de los datos de Mexicali. La distancia entre los sitios 122 y 18 es de 19.6 km.	113
4.20	Modelos obtenidos para la línea 1 de los datos de Mexicali por Wildt et al.	113
4.21	Parte inferior del modelo LP de la figura 4.19. El primer sitio del modelo LP se localiza a 1.5 km. del origen del modelo de Wildt et al.	114
4.22	Ajuste a los datos del sitio 122, con $RMS = 3.3$. La respuesta corresponde al modelo en éste sitio.	114

4.23 Ajuste a los datos del sitio 17, con $RMS = 1.76$. La respuesta es para el modelo en ése sitio. 115

Resumen

Los métodos de sondeo electromagnético se han aplicado desde hace varias décadas para estudiar el interior de la Tierra. En éstos métodos se toman lecturas de cantidades eléctricas en la superficie de la Tierra, y se hacen interpretaciones sobre la distribución de la conductividad eléctrica en el subsuelo. De la gran cantidad de técnicas que se han aplicado al problema, las más populares generan modelos suaves del subsuelo, los cuales no son los más adecuados para representar la estructura real. La generación de modelos suaves a trozos ha sido un problema difícil, que ha requerido de la aplicación de métodos de optimización costosos en cuanto a capacidad de cómputo, tales como programación lineal a gran escala. En este trabajo se incorporan técnicas que permiten generar modelos suaves a trozos, usando métodos de optimización que combinan los procedimientos originales de minimización de la rugosidad del modelo, con elementos que permiten detectar e incluir discontinuidades en el mismo. Se generaron datos sintéticos para probar los algoritmos desarrollados, y se observó que funcionan adecuadamente, recuperando la estructura deseada. Se aplicaron además los algoritmos a datos reales para los problemas Magnetotelúrico y de Corriente Directa. Los algoritmos propuestos generan modelos que poseen estructuras a capas, las cuales se rompen horizontalmente en forma automática cuando es requerido por los datos. Los modelos obtenidos recuperan información que se ha obtenido por métodos computacionalmente más caros usando restricciones en los datos con el fin de ajustarlos adecuadamente.

Agradecimientos

Deseo agradecer al Dr. José Luis Marroquín, codirector de tesis, por su generosa atención e intuitivos y acertados consejos, que me condujeron a la realización de este proyecto. Al Dr. Enrique Gómez Treviño, codirector de tesis, por creer en los métodos propuestos, su soporte en conocimientos sobre los problemas Geofísicos fué de un valor incalculable para la comprensión de los mismos. A los sinodales; Profesores Mariano Rivera, Salvador Botello y Francisco Esparza, por sus valiosos comentarios y acertada crítica. Al Dr. Mario Martínez, por su continuo apoyo durante su gestión como Director General de CICESE. Al Dr. Héctor Escamilla, Director de la División de Física Aplicada, de CICESE, por el soporte dentro de un proyecto interno. El autor desea agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para la realización de sus estudios.

Se agradece al Dr. S. Constable por el código de Occam, al Dr. Alan Jones, por hacer accesibles los datos de COPROD2, al Dr. J. Weaver por el programa de modelado FR2D y al Sr. F. Arellano de Comisión Federal de Electricidad, por proveer los datos de Mexicali.

Guanajuato, México

Hugo Homero Hidalgo Silva

Introducción

Los métodos de sondeo electromagnético se han venido aplicando desde hace varias décadas para investigar el interior de la Tierra, a profundidades desde unos pocos metros hasta cientos de kilómetros. Estos métodos han atraído el interés de científicos de diferentes disciplinas; físicos, matemáticos aplicados, geofísicos, químicos, incluyendo a investigadores en Ciencias de la Computación. El interés principal por nuestra parte ha sido el de estudiar los problemas de inversión de datos, considerando su relación con el tratamiento que se ha dado al problema de reconstrucción de imágenes, dentro del área de Visión Computacional.

Los métodos de sondeo se pueden dividir considerando la manera en que se realiza la inducción, ya sea mediante una fuente artificial ó a través de campos electromagnéticos naturales. El método que considera los campos naturales se denomina Magnetotelúrico (MT), y es uno de los más empleados actualmente. Se ha usado para determinar la distribución de la conductividad eléctrica, regímenes de temperatura, y estructura geológica del subsuelo. El campo electromagnético natural de la Tierra contiene una cantidad apreciable de energía sobre un amplio espectro de frecuencias [1]. En una subtormenta geomagnética, un fenómeno que ocurre varias veces al mes, la conversión de energía cinética al campo electromagnético es de aproximadamente 10^{21} a 10^{22} ergios. La magnitud de tales campos electromagnéticos es muchos órdenes

de magnitud mayor que la de campos que pueden ser generados por el hombre en la superficie de la Tierra.

El campo electromagnético natural a frecuencias arriba de unos pocos Hz es producido principalmente por la actividad meteorológica, en particular, por rayos asociados a tormentas. Ellos proveen de una fuente uniforme de energía electromagnética debido a que hay casi siempre una tormenta en curso en alguna parte del mundo. En la aproximación al sondeo magnetoteléurico propuesta por Cagniard [2], se hacen dos suposiciones importantes; el campo electromagnético natural es una onda plana propagándose verticalmente hacia abajo en la Tierra, y la Tierra es uniforme lateralmente. Esas dos suposiciones permiten obtener la resistividad aparente ρ_a usando la fórmula de Cagniard

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu_0} \left| \frac{E}{H_{\perp}} \right|^2$$

donde ω es la frecuencia en radianes por segundo, μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, E es la intensidad del campo eléctrico en la superficie de la Tierra y H_{\perp} es la componente ortogonal de la intensidad del campo magnético en la superficie. De esta manera se pueden obtener mediciones de la resistividad de la Tierra, en función de la frecuencia ó periodo. También se considera como dato a la fase de $Z = E/H_{\perp}$, para diferentes frecuencias.

Por otra parte, el método de sondeo de resistividad (CD) fué aplicado por primera vez por Conrad Schlumberger en 1912. En este método se inyecta una corriente I en la Tierra por medio de dos electrodos y los campos resultantes se detectan mediante otros dos electrodos. La cantidad de interés es la impedancia de transferencia $Z = V/I$, que también permite obtener mediciones de la resistividad de la Tierra; cambiando la posición de los electrodos se puede modificar el alcance de las mediciones.

En los dos casos, la interpretación de las lecturas se basa en la suposición de que la subsuperficie consiste de una secuencia de capas distintas de espesor finito; cada una de estas capas se supone eléctricamente homogénea e isotrópica, y las fronteras entre capas subsecuentes se suponen horizontales. La interpretación ó problema inverso consiste en recuperar la distribución de la conductividad eléctrica vertical a partir de las mediciones en la superficie. En el primer caso se tienen lecturas que corresponden a diferentes períodos, y en el segundo a diferentes separaciones entre electrodos. El conocimiento de la distribución de la conductividad en la Tierra es de utilidad en la minería, en la prospección petrolera y también en la búsqueda de campos geotérmicos.

La inversión de datos en este tipo de sondeos es un problema "mal planteado" en el sentido matemático [3], y normalmente se utiliza regularización para tratarlo. La manera clásica de aplicar regularización es mediante la inserción de términos que minimizan la rugosidad de los modelos desarrollados. La distribución de la conductividad que resulta de estos métodos es un función continua. Esto es muy conveniente desde el punto de vista matemático [47]. Sin embargo, una manera más realista de representar la Tierra es a través de un modelo continuo a pedazos, sobre un basamento homogéneo. Esto es característico de cuencas sedimentarias.

El objetivo fundamental de este trabajo es desarrollar algoritmos que permitan incorporar discontinuidades en los modelos recuperados. Para recuperar los modelos discontinuos se aplica fundamentalmente un método conocido en Visión Computacional como *Proceso de Líneas* (LP). Los modelos LP suponen continuidad a pedazos, la cual se obtiene relajando las restricciones de suavidad en puntos donde la magnitud de la derivada de la señal excede un cierto umbral. Los algoritmos más usados se basan en el funcional de regularización de Tikhonov [26], agregando variables binarias

que permiten la inclusión de discontinuidades durante el desarrollo del modelo.

En los siguientes capítulos se presentan resultados de aplicar los métodos propuestos a datos obtenidos por modelos sintéticos, y también a lecturas de campo, para los casos MT y DC. En el capítulo 1 se presenta la base matemática de los métodos de sondeo MT y DC, además se hace una breve revisión de las técnicas actuales para su solución. El capítulo 2 trata sobre problemas mal planteados y hace una revisión de métodos de regularización que se han aplicado a los mismos, además se presentan algoritmos de inversión que permiten recuperar modelos continuos a trozos. En el capítulo 3 se aplican los algoritmos presentados en el capítulo 2 a la inversión de datos unidimensionales (1D) en problemas MT y DC. En el capítulo 4 se desarrolla un algoritmo para la inversión de datos bidimensionales (2D), usando modelos 1D acoplados mediante restricciones horizontales del tipo LP. Se aplican a datos sintéticos y a datos de campo en los casos MT y DC. El capítulo 5 presenta las conclusiones y recomendaciones.

Capítulo 1

Problemas de Inversión Electromagnéticos

1.1 Método Magnetotelúrico

A continuación se describe el fundamento del método MT para un modelo estratificado horizontalmente. En un punto de observación en la superficie se toman lecturas de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético causados por fuentes naturales.

La relación entre las intensidades de los campos eléctrico E y magnético H , es una cantidad que tiene unidades de impedancia eléctrica, y bajo ciertas condiciones esta impedancia es una función de las propiedades eléctricas del medio [1]. Determinando la impedancia

$$Z = E/H$$

para una serie de frecuencias, se obtiene el espectro de frecuencias para la impedancia, el cual provee de información sobre el perfil de la conductividad eléctrica como una función de la profundidad en la Tierra.

Si las propiedades electromagnéticas de la Tierra son independientes de la dirección (isotrópicas), E y H son mutuamente perpendiculares. A frecuencias relativamente altas, la impedancia sólo provee información sobre las propiedades de la capa más cercana a la superficie. A frecuencias más bajas, la profundidad de penetración del campo se incrementa y entonces el método MT puede ser usado para realizar sondeos verticales en el punto de observación.

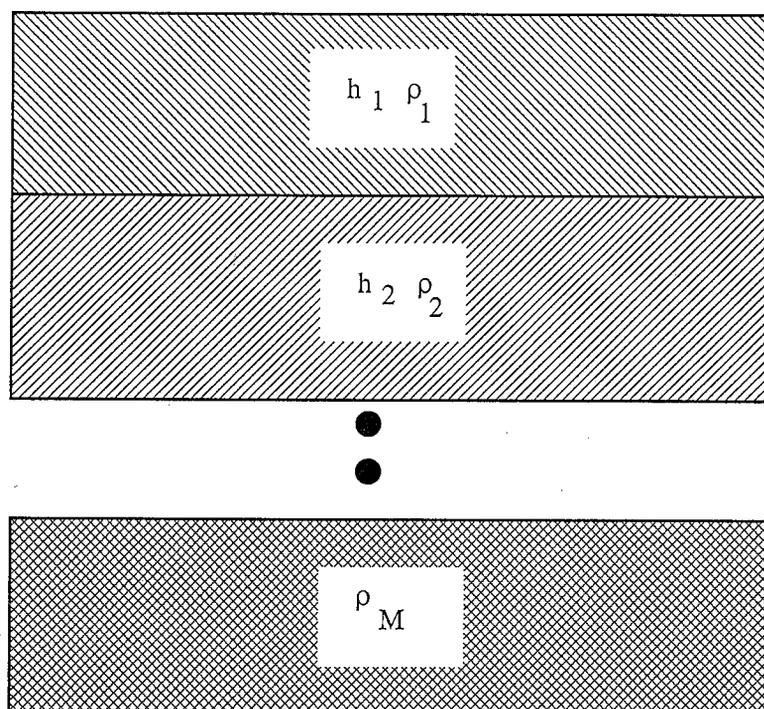


Figura 1.1: Modelo de un medio compuesto por capas horizontales

Se supone que la Tierra consiste de M capas, cada una con resistividad ρ_n y espesor h_n , $n = 1, \dots, M$ como se muestra en la figura 1.1, el espesor de la última capa se supone de magnitud infinita, ésto es, un hemiespacio. También se supone que existe un campo electromagnético que no depende de las coordenadas del plano horizontal, es

decir, que sólo es función de la coordenada z y de la distribución de las resistividades. Tal campo electromagnético puede ser causado por una hoja de corriente horizontal localizada sobre la superficie de la Tierra. Ésta fuente genera un campo magnético horizontal uniforme que no disminuye al aumentar z , la cual es positiva hacia abajo. Las suposiciones anteriores sobre la estructura del campo primario han dado lugar a serias críticas sobre las bases teóricas del método. Sin embargo, los resultados para la conducta de la impedancia permanecen prácticamente los mismos para fuentes reales, al considerar variaciones de períodos relativamente cortos. Se utilizará el Sistema Internacional de Unidades *SI*, en el cual la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética son $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ farads/metro, y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henrios/metro.

La corriente en la fuente plana genera un campo magnético uniforme H_{0y} , el cual es perpendicular a la densidad de corriente j_x . Conforme el campo magnético primario cambia con el tiempo, aparece el vórtice del campo eléctrico primario. Éste se dirige a lo largo del eje x , causando corrientes en el medio conductor, las cuales sirven de fuentes para un campo secundario. No aparecen cargas eléctricas en las interfaces entre capas, debido a que el campo eléctrico no interseca fronteras de regiones con conductividades diferentes.

Considerando el carácter uniforme del campo primario, se tiene que:

$$\frac{\partial H_{0y}}{\partial x} = \frac{\partial H_{0y}}{\partial y} = \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} = \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} \equiv 0. \quad (1.1.1)$$

La densidad de las corrientes inducidas no cambia sobre el plano horizontal y por esta razón el campo secundario también tiene componentes H_y y E_x , que no dependen de las coordenadas x y y . Entonces, el campo electromagnético tiene la forma

$$E = (E_x, 0, 0), \quad H = (0, H_y, 0). \quad (1.1.2)$$

Para resolver las ecuaciones de Maxwell, se busca un campo electromagnético de la forma

$$\tilde{E}_x = E_x e^{-i\omega t}, \quad \tilde{H}_y = H_y e^{-i\omega t}, \quad (1.1.3)$$

donde \tilde{E}_x y \tilde{H}_y son amplitudes complejas, $\omega = 2\pi/T$ es frecuencia, y T es el período. El módulo de la amplitud compleja es igual a la amplitud del campo, y la fase de la amplitud compleja es la fase del campo armónico descrito por la senoide. Las expresiones para el campo (E_x, H_y) se pueden obtener de la solución de las ecuaciones de Maxwell, las cuales, para campos armónicos tienen la forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} - i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (1.1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (1.1.7)$$

donde σ es la conductividad del medio. El rango en el que varían los períodos es de 0.01 a miles de segundos. Considerando que estamos tratando con un campo quasi-estacionario, entonces las corrientes de desplazamiento $-i\omega\epsilon\mathbf{E}$ pueden despreciarse del sistema (1.1.5), y las ecuaciones pueden escribirse como:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y \quad (1.1.8)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\sigma E_x. \quad (1.1.9)$$

Tomando la derivada de cada una de esas ecuaciones respecto de z y haciendo las sustituciones apropiadas entre las dos ecuaciones en (1.1.6) y (1.1.7), se tiene

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -i\omega\mu\sigma E_x \quad (1.1.10)$$

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} = -i\omega\mu\sigma H_y, \quad (1.1.11)$$

6

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \quad (1.1.12)$$

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} + k^2 H_y = 0, \quad (1.1.13)$$

donde $k^2 = i\sigma\mu\omega$ es el número de onda al cuadrado. Las ecuaciones anteriores son válidas para los campos eléctrico y magnético dentro de cada capa, pero no son válidas en las fronteras entre los medios, porque las segundas derivadas de las componentes de los campos respecto de z son discontinuas. En lugar de las ecuaciones (1.1.12,1.1.13), entre capas se aplican las condiciones de frontera; los componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético son continuas al pasar a través de la interface.

$$E_x^{(n)} = E_x^{(n+1)} \quad (1.1.14)$$

$$H_y^{(n)} = H_y^{(n+1)} \quad (1.1.15)$$

en z correspondiente a la profundidad de la capa n . Las soluciones a las ecuaciones (1.1.12,1.1.13) tienen una forma común. Para el campo eléctrico en cada capa:

$$E_x^{(n)} = A_n e^{ik_n z} + B_n e^{-ik_n z}, \quad (1.1.16)$$

donde k_n es el número de onda para la n -ésima capa. Una expresión para el campo magnético se obtiene de $H_y = (i\omega\mu)^{-1} \frac{\partial E_x}{\partial z}$, por tanto,

$$H_y^{(n)} = \frac{k_n}{\omega\mu} (A_n e^{ik_n z} - B_n e^{-ik_n z}). \quad (1.1.17)$$

El término $A_n e^{ik_n z}$ representa la parte del campo que disminuye al aumentar z , y $B_n e^{-ik_n z}$ la parte que aumenta con z .

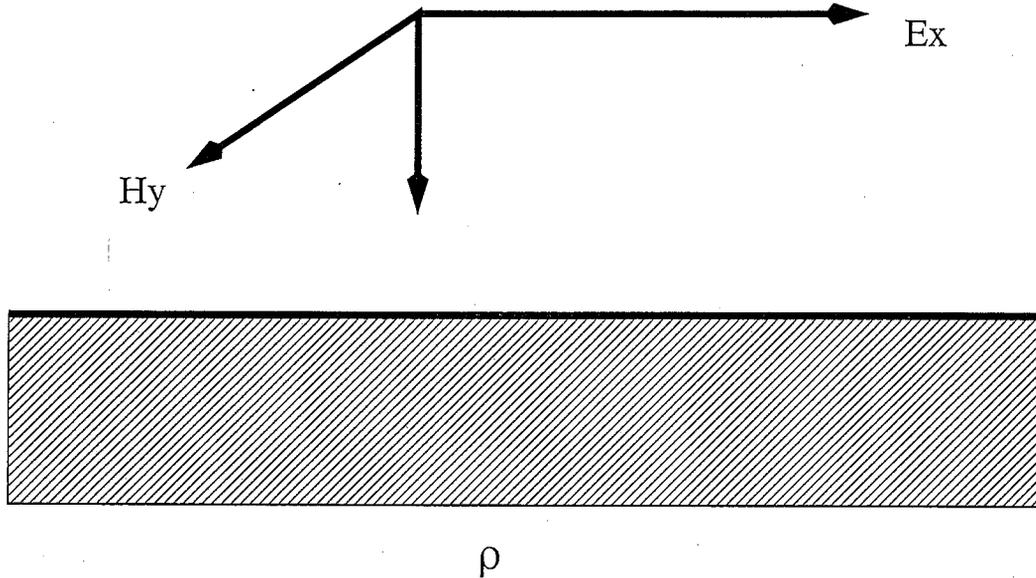


Figura 1.2: Modelo para un hemi-espacio uniforme

Considerando un hemi-espacio uniforme, como en la figura 1.2, debido a que el campo debe disminuir al aumentar z como consecuencia de la transformación de la energía electromagnética en calor, las expresiones para el campo son como sigue:

$$E_x = A e^{ikz} \quad (1.1.18)$$

$$H_y = \frac{k}{\omega\mu} A e^{ikz}. \quad (1.1.19)$$

Éstas expresiones representan las amplitudes complejas de las componentes del campo. Los campos eléctrico y magnético son la suma de un campo primario causado por corrientes en el vacío y un campo secundario causado por corrientes inducidas en

el medio conductor. En la superficie de la Tierra se tiene

$$E_x(0) = A \quad (1.1.20)$$

$$H_y(0) = \frac{k}{\omega\mu} E_x(0). \quad (1.1.21)$$

Donde A contiene información acerca de las partes primaria y secundaria del campo. Es necesario eliminar la dependencia del campo primario, debido a que el campo primario no se conoce y puede ser que cambie con el tiempo.

Para eliminar el efecto del campo primario, se considera la relación

$$E_x/H_y = \omega\mu/k = (\omega\mu/\sigma)^{1/2} e^{-i\pi/4},$$

la cual no depende de la intensidad del campo primario. Esta cantidad se llama la impedancia de onda plana, y para un medio uniforme es: $Z_{xy} = \omega\mu/k$. Si el campo eléctrico solamente tiene componente en la dirección de y , entonces el campo magnético sólo tiene componente en x , y $Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} = -\omega\mu/k$.

De las ecuaciones (1.1.18,1.1.19) se observa que la relación entre los componentes E_x y H_y no depende de z para un hemi-espacio uniforme.

1.1.1 Modelos 1D en capas

El modelo más simple que puede describir adecuadamente la subsuperficie es aquel que no cambia lateralmente. La estructura de resistividad del modelo consiste de capas horizontales, cada una con resistividad y espesor diferentes, sobre un hemi-espacio uniforme. Este se llama un modelo geoelectrico 1D de la Tierra. Cualquier sección transversal de tal Tierra en cualquier lugar y cualquier dirección debe aparecer idéntica. Este modelo consiste de M capas, donde la i ésima ($i = 1, \dots, M - 1$) capa se caracteriza por dos parámetros: la resistividad ρ_i y el espesor h_i . Las $M - 1$ capas

del modelo reposan sobre un hemi-espacio geológico homogéneo con resistividad ρ_M . La resistividad está dada en Ohm-m y los espesores en metros.

Para este modelo, una expresión para Z_{xy} en la superficie ha sido desarrollado [55], en términos de los parámetros ρ_i , h_i . Empezando sobre el hemi-espacio homogéneo, se puede evaluar progresivamente Z_i , encima de la capa i , usando la relación recursiva [55] [1]

$$Z_i = k_i \rho_i \frac{k_i \rho_i (1 - u_i) + (1 + u_i) Z_{i+1}}{k_i \rho_i (1 + u_i) + (1 - u_i) Z_{i+1}}, \quad (1.1.22)$$

donde $i = M - 1, M - 2, \dots, 1$. La variable k_i es el número de onda, dado por

$$k_i = \sqrt{i\omega\mu_0/\rho_i}$$

y el operador de propagación u_i es dado por

$$u_i = e^{-2k_i h_i}.$$

La impedancia en la superficie se utiliza para obtener la "resistividad aparente", definida por

$$\rho_a = |Z_1|^2 / (\omega\mu_0). \quad (1.1.23)$$

Las mediciones de los campos eléctrico y magnético en la superficie se reportan comúnmente en términos de ρ_a y la fase de Z_1 , $\phi = \arctan(Im(Z_1)/Re(Z_1))$, a una frecuencia dada ω .

Si la fuente no genera ondas planas y el medio no es homogéneo, la perpendicularidad entre los componentes horizontales de E^0 y H^0 no se cumple. En este caso, cada

componente del campo eléctrico depende de ambas componentes del campo magnético horizontal, a través de una relación tensorial

$$E_x = Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \quad (1.1.24)$$

$$E_y = Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y, \quad (1.1.25)$$

en forma compacta:

$$E = ZH. \quad (1.1.26)$$

En una Tierra uniforme ó de estructura en capas horizontales, Z_{xx} y Z_{yy} son cero, $Z_{yx} = -Z_{xy}$, y las ecuaciones se reducen a $E_x = Z_{xy}H_y$, y $E_y = Z_{yx}H_x$. En un caso 2D, si el eje x ó el y están en la dirección de penetración (strike) entonces $Z_{xx} = Z_{yy} = 0$, pero $Z_{xy} \neq -Z_{yx}$. Si ningún eje está en esa dirección, entonces Z_{xx} y Z_{yy} serán diferentes de cero.

La "impedancia efectiva",

$$Z_{eff} = \sqrt{Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}Z_{yx}} \quad (1.1.27)$$

se usa para interpretar una estructura no homogénea por medio de procedimientos de modelado 1D entre sitios individuales, debido a su propiedad de ser invariante rotacionalmente [34].

1.2 Técnicas de solución para el problema inverso

MT

El problema inverso MT 1D consiste en obtener el coeficiente $\sigma(z)$ de una ecuación diferencial de segundo orden en $E(z, \omega)$

$$E''(z, \omega) + i\omega\mu_0\sigma(z)E(z, \omega) = 0, \quad (1.2.1)$$

cuando se tienen estimaciones de $E(0, \omega)$ para varias frecuencias. Para esto se han aplicado una gran cantidad de técnicas, desde la generación de curvas maestras para comparar visualmente con las obtenidas en el campo, hasta el desarrollo de métodos sofisticados de solución. Whittall y Oldenburg [10] han realizado un estudio de los diferentes métodos desarrollados para inversión MT 1D hasta 1992, separándolos en: métodos linealizados, métodos asintóticos, métodos globales, métodos Monte Carlo, métodos exactos y métodos de valuación. Nosotros preferimos clasificarlos de acuerdo a la forma de parametrizar la Tierra en función de la profundidad, entonces se pueden considerar dos grupos principales; "Modelos de pocos parámetros", y "Modelos sobreparametrizados". A continuación describiremos cada uno de ellos.

1.2.1 Modelos de pocos parámetros

En este caso, la parametrización del modelo de conductividad restringe el espacio de modelos a un número pequeño de dimensiones. Esta restricción tiene la ventaja de que si la parametrización es consistente con la geología real, entonces una solución al problema paramétrico puede estar cerca de la conductividad real de la Tierra.

En esta formulación, se caracteriza la conductividad como un conjunto de N capas planas, paralelas isotrópicas y homogéneas, como es el caso del modelo 1D presentado

anteriormente. La respuesta directa se puede expresar

$$d_j = T_j(m) \quad (1.2.2)$$

para $j = 1, 2, \dots, 2N$, j indica la frecuencia a la que se hace la medición, d_j es el dato observado (ρ_a, ϕ) , m es el vector de parámetros del modelo, consistente en las conductividades de capa (representadas por σ_i , $\log(\sigma_i)$, ó $\rho_i = 1/\sigma_i$), $i = 1, \dots, N$, se incluyen los espesores (h ó $\log(h)$) y T_j es el operador no-lineal que permite calcular ρ_a y ϕ a partir del modelo $m = \{\rho_i, h_i\}$ usando las ecuaciones (1.1.23, 1.1.22).

Generalmente se seleccionan $\log(\sigma)$ y $\log(h)$, debido a que se garantiza positividad, además de que la conductividad puede cambiar por varios órdenes de magnitud, y la escala de resolución del método decrece exponencialmente con la profundidad. El método de solución es como sigue; si m_0 es un modelo inicial, y d_j^p las observaciones predichas obtenidas resolviendo (1.2.2) con $m = m_0$. Se define el error

$$e_j = d_j - d_j^p. \quad (1.2.3)$$

El modelo m_0 se considera aceptable si todos los $|e_j|$ son lo suficientemente pequeños, ó si alguna norma del desajuste es pequeña. Medidas adecuadas de desajuste son chi-cuadrada,

$$\chi^2 = \sum_j (d_j - d_j^p)^2 / \epsilon_j^2 \quad (1.2.4)$$

donde ϵ_j son las incertidumbres de los datos, la norma L_1 ,

$$\sum_j \frac{|d_j - d_j^p|}{\epsilon_j} \quad (1.2.5)$$

ó el error RMS

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_j (d_j - d_j^p)^2 / \epsilon_j^2}. \quad (1.2.6)$$

Si el desajuste no es aceptable, entonces se busca una perturbación δm tal que

$$m_1 = m_0 + \delta m \quad (1.2.7)$$

mejore el ajuste a los datos. Expandiendo los funcionales (1.2.2) cerca del modelo inicial se obtiene

$$T_j(m_0 + \delta m) \approx T_j(m_0) + \sum_{l=1}^M \frac{\partial T_j(m_0)}{\partial m_l} \delta m_l \quad (1.2.8)$$

donde se desprecian los términos mayores ó iguales al de segundo orden. Haciendo $d_j = T_j(m_0)$ y escribiendo

$$J_{j,l} = \frac{\partial T_j(m_0)}{\partial m_l} = \frac{\partial d_j(m_0)}{\partial m_l} \quad (1.2.9)$$

se obtiene

$$J \delta m = \delta e. \quad (1.2.10)$$

Este es un sistema lineal de ecuaciones para el vector de perturbación δm . La matriz J , de dimensión $N \times M$ es la matriz Jacobiana, ó matriz de sensibilidad. Sus elementos pueden obtenerse de expresiones analíticas, para lo cual conviene definir las siguientes cantidades: la impedancia intrínseca $w_j = \frac{k_j}{\sigma_j} = \sqrt{i\omega\mu\rho_j}$, y la impedancia en el tope de la capa j , como

$$Z_j = w_j \frac{1 - R_j u_j}{1 + R_j u_j}, \quad j = n - 1, \dots, 1 \quad (1.2.11)$$

donde el coeficiente de reflexión R_j es dado por

$$R_j = \frac{w_j - Z_{j+1}}{w_j + Z_{j+1}} \quad (1.2.12)$$

y $Z_n = w_n$.

La derivadas parciales están dadas por:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial m_j} = \frac{2}{\omega \mu} \left\{ \operatorname{Re}[Z_1] \operatorname{Re} \left[\frac{\partial Z_1}{\partial m_j} \right] + \operatorname{Im}[Z_1] \operatorname{Im} \left[\frac{\partial Z_1}{\partial m_j} \right] \right\} \quad (1.2.13)$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial m_j} = \frac{1}{|Z_1|^2} \left\{ \operatorname{Re}[Z_1] \operatorname{Im} \left[\frac{\partial Z_1}{\partial m_j} \right] - \operatorname{Im}[Z_1] \operatorname{Re} \left[\frac{\partial Z_1}{\partial m_j} \right] \right\}. \quad (1.2.14)$$

Para evaluar estas expresiones se requiere la cantidad $\frac{\partial Z_1}{\partial m_j}$, la cual se obtiene recursivamente de

$$\frac{\partial Z_1}{\partial m_j} = \frac{\partial Z_1}{\partial Z_2} \frac{\partial Z_2}{\partial Z_3} \dots \frac{\partial Z_{j-1}}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial m_j}. \quad (1.2.15)$$

Donde las derivadas parciales intermedias están dadas por

$$\frac{\partial Z_j}{\partial Z_{j+1}} = \frac{4w_j^2 u_j}{(w_j + Z_{j+1})^2 (1 + R_j u_j)^2} \quad (1.2.16)$$

y las derivadas parciales de la impedancia de cada capa respecto al elemento del modelo correspondiente son:

$$\frac{\partial Z_j}{\partial \rho_j} = \frac{Z_j}{2\rho_j} - \frac{2i\omega\mu}{(1 + R_j u_j)^2 (w_j + Z_{j+1})^2} \left(\frac{h_j (w_j^2 - Z_{j+1}^2)}{\rho_j} + Z_{j+1} \right). \quad (1.2.17)$$

Para la última capa

$$\frac{\partial Z_n}{\partial \rho_n} = k_n / 2. \quad (1.2.18)$$

Como es común trabajar con el logaritmo de la respuesta, es necesario modificar las derivadas adecuadamente:

$$J_{j,l} = \frac{\partial \rho_a(\omega_j)}{\partial m_l} = \frac{1}{\rho_a(\omega_j)} \frac{\partial \rho_a(\omega_j)}{\partial m_l}.$$

También se pueden aproximar las derivadas parciales usando diferencias finitas, por ejemplo, con diferencias hacia delante:

$$J_{j,l} \approx \frac{\log(T_j(m_l + \delta m)) - \log(T_j(m_l))}{\delta m}. \quad (1.2.19)$$

La mayoría de los métodos para evaluar (1.2.10) pesan primero cada ecuación por la incertidumbre del dato. Esto es con el fin de reducir los efectos de datos inexactos en la solución final y también establecer las ecuaciones adimensionalmente. Los nuevos datos son $\delta \tilde{\epsilon} = Q \delta \epsilon$, donde la matriz $Q = \text{diag}(1/\epsilon_1, 1/\epsilon_2, \dots, 1/\epsilon_N)$, con ϵ_j la incertidumbre del dato j . También se introducen pesos en los parámetros, esto con el fin de hacer las variables adimensionales y de tamaño comparable. Este escalamiento puede disminuir la condición de la matriz y por tanto estabilizar la inversión. Si $W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_M)$ son los pesos para los parámetros, incorporando Q y W en (1.2.10) se obtiene

$$QJW^{-1}W\delta m = Q\delta \epsilon \quad (1.2.20)$$

ó

$$H\delta \hat{n} = \delta \tilde{\epsilon}, \quad (1.2.21)$$

donde $H = QJW^{-1}$, $\delta \hat{n} = W\delta m$ y $\delta \tilde{\epsilon} = Q\delta \epsilon$. Las ecuaciones (1.2.21) se pueden resolver encontrando una inversa generalizada para la matriz H . Usando descomposición en valores singulares [13], la matriz H puede escribirse como $H = U_p \Sigma_p V_p^t$ donde $\Sigma_p = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_p)$ en la que sus elementos son los p valores singulares diferentes de cero de H , y las p columnas de la matriz (de dimensión $N \times p$) U_p contienen

vectores base para la parte activa del espacio de datos. mientras la matriz V_p (de dimensión $M \times p$) tiene sus columnas compuestas de la parte activa del espacio de modelos.

Desafortunadamente, el vector solución $\delta\hat{m}$ posee generalmente una norma muy grande, debido a que H posee valores singulares pequeños, los cuales amplifican el ruido en las observaciones, por lo que se requiere de estabilización. Las ecuaciones de perturbación (1.2.21) son válidas suponiendo que m_0 está cerca de un modelo aceptable (ó del modelo actual) tal que los términos de orden alto sean pequeños y puedan ser despreciables. Una estrategia adecuada es alterar la solución mediante regularización, por ejemplo con el método de Marquardt, que consiste en resolver:

$$\min\{\|J\delta m - \delta e\|^2 + \lambda^2\|\delta m\|^2\}. \quad (1.2.22)$$

Aquí λ es el "parámetro de Marquardt", usado para controlar el tamaño y dirección del paso δm durante la iteración [5]. Esta técnica de solución se engloba dentro de los métodos de regularización, como se muestra en el siguiente capítulo. El esquema de Marquardt trata de reducir el tamaño de la perturbación de un paso al siguiente, con el fin de estabilizar el algoritmo. Su solución depende fuertemente del modelo de arranque. Si se empieza con un número pequeño de parámetros, la solución puede ser que no ajuste lo suficiente a los datos, por otro lado, si se aumenta el número de parámetros, pueden resultar oscilaciones grandes en el modelo, las cuales no son fáciles de controlar.

1.2.2 Modelos sobreparametrizados

Dentro del segundo grupo se pueden mencionar los llamados por Whittall y Oldenburg [10] métodos asintóticos; son esquemas de inversión aproximada, que consideran varias formas de aproximar las ecuaciones MT. Estos métodos explotan el hecho de que las señales de baja frecuencia penetran más profundamente en la Tierra que las de alta frecuencia, y por lo tanto, las frecuencias sucesivamente más bajas determinan conductividades sucesivamente más profundas. Desafortunadamente, algunas de estas aproximaciones no utilizan la información de la fase. Además, como no incorporan los errores en los datos, las conductividades reconstruidas pueden no ajustar adecuadamente todas las observaciones.

En otra variedad del segundo grupo, el perfil se representa por una función arbitraria de la profundidad, y se discretiza representando a la Tierra por muchas capas de espesores fijos, y conductividades desconocidas. Las resistividades se optimizan para producir modelos de variación suave con la profundidad. Si los espesores son lo suficientemente delgados, el problema bajo-determinado que resulta es una versión discreta del verdadero problema inverso, lo que permite entender la no-unicidad inherente en la inversión. Los métodos son robustos y no requieren información sobre el número de capas en el modelo.

Derivadas de Fréchet

Oldenburg [11] contruye modelos continuos de $\sigma(z)$ usando teoría inversa lineal de Backus-Gilbert (BG). Siguiendo un método propuesto por Parker, transforma la ecuación estándar (1.2.1) en una ecuación no lineal de primer orden de Riccati, y luego linealiza e integra para encontrar una ecuación integral Fredholm del primer

tipo. Esta ecuación relaciona cambios en el modelo de conductividad con cambios en los datos via los kerneles de Fréchet [12]. La ecuación se resuelve para obtener una perturbación al modelo, la cual cuando se agrega al modelo actual, produce una nueva estructura de conductividad, cuyas respuestas ajustan mejor las observaciones. La solución es iterativa, debido a que se han despreciado los términos de orden alto; sin embargo, si se toman precauciones al construir las perturbaciones y sumarlas al modelo actual, el algoritmo es estable. Las precauciones incluyen limitar el tamaño de las perturbaciones y asegurar que la función de perturbación es lo suficientemente suave.

La forma general de la solución BG a un problema inverso no lineal empieza con la ecuación directa (1.2.2);

$$d_j = T_j[m(z)]. \quad (1.2.23)$$

Agregando una perturbación $\delta m(z)$ al modelo altera los datos de modo que

$$d_j + \delta d_j = T_j[m(z) + \delta m(z)]. \quad (1.2.24)$$

Linealizando el operador T_j y despreciando términos de orden alto

$$T_j[m(z) + \delta m(z)] \approx T_j[m(z)] + \int g_j(m(z); z) \delta m(z) dz. \quad (1.2.25)$$

Las funciones $g_j(m(z); z)$ son los kerneles de Fréchet evaluados usando $m(z)$. La ecuación final, obtenida sustituyendo las ecuaciones (1.2.24) y (1.2.25) en (1.2.23) es

$$\delta d_j(z) \approx \int g_j(m(z); z) \delta m(z) dz \quad (1.2.26)$$

para $j = 1, 2, \dots, N$. Éste es un conjunto de ecuaciones lineales que relacionan perturbaciones en el modelo con perturbaciones en los datos. La ecuación (1.2.26) es

la forma continua de las ecuaciones paramétricas (1.2.10) ó (1.2.21). Para encontrar al kernel de Fréchet, Oldenburg primero define $R(z; \omega) = B(z; \omega)/E(z; \omega)$, donde B es la densidad de flujo magnético $B = \mu H$, y E la intensidad del campo eléctrico, usando la relación de Maxwell $B(z; \omega) = \frac{1}{\omega} \frac{dE(z; \omega)}{dz}$, la ecuación (1.2.1) se transforma en

$$\frac{dR}{dz} - i\omega R^2 - \mu_0 \sigma = 0. \quad (1.2.27)$$

Analizando para una perturbación $\sigma_1 = \sigma + \delta\sigma$ y $R_1 = R + \delta R$, la ecuación (1.2.27) es ahora

$$\frac{d\delta R}{dz} - 2i\omega R\delta R - \mu_0 \delta\sigma = 0. \quad (1.2.28)$$

La cual se resuelve, produciendo

$$\delta R(0; \omega) = - \int_0^\infty \mu_0 \left(\frac{E(z; \omega)}{E(0; \omega)} \right)^2 \delta\sigma(z) dz, \quad (1.2.29)$$

donde el integrando que multiplica a $\delta\sigma(z)$ es el kernel de Fréchet. A causa de los cambios grandes que sufre la conductividad, se selecciona $m(z) = \ln \rho(z) = \ln(1/\sigma(z))$ como el modelo, en lugar de $\sigma(z)$ ó $\rho(z)$, entonces (1.2.29) es ahora

$$\delta R(0; \omega) = - \int_0^\infty \mu_0 \sigma(z) \left(\frac{E(z; \omega)}{E(0; \omega)} \right)^2 \delta m(z) dz. \quad (1.2.30)$$

Como E y B son números complejos, es conveniente considerar por separado las amplitudes y fases para adscribirles errores estadísticos a cada una. Para esto se sustituye $R(0; \omega) = |R(0; \omega)| e^{i\phi(\omega)}$ en la ecuación (1.2.30) y se separan partes real e imaginaria. Si se denota a $K_j(z)$ por la amplitud ó fase del kernel correspondiente, y a \tilde{d}_j la respuesta correspondiente, entonces

$$\tilde{d}_j = \int_0^\infty K_j(z) \delta m(z) dz. \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.2.31)$$

Para realizar el proceso de inversión, primero se elige un modelo de arranque m_0 y se obtienen las respuestas d_j^0 . Si δd_j^0 es la diferencia $d_j - d_j^0$, las N ecuaciones en (1.2.31) pueden resolverse para encontrar un $\delta m_0(z)$. Los kernels de Fréchet se obtienen resolviendo para el campo eléctrico en (1.2.1) a ciertas profundidades especificadas previamente, el nuevo modelo $m_1(z) = m_0(z) + \delta m_0(z)$ tendrá respuestas más cerca de las observaciones. El procedimiento se repite hasta que se encuentra un modelo aceptable. La tasa de convergencia se monitorea con el error RMS, y se termina cuando éste es suficientemente pequeño.

Occam

Constable et. al. [43] observaron que los modelos producidos con el algoritmo de Marquardt producen componentes cuya estructura no es realista. Proponen que es más adecuado generar modelos suaves, considerando que la naturaleza difusiva del proceso de propagación de la energía electromagnética no permite resolver cambios bruscos en la conductividad, sino que tiende a emborronar la estructura real de la Tierra. Entonces se desea introducir el requerimiento de suavidad en los modelos obtenidos. Observan que Tikhonov ya había establecido el concepto al tratar problemas mal-planteados [26], y proponen usar regularización para el problema de ajuste

$$X^2 = \|Wd - WT(m)\|^2. \quad (1.2.32)$$

Donde W es una matriz diagonal $W = \text{diag}\{\frac{1}{\epsilon_1}, \frac{1}{\epsilon_2}, \dots, \frac{1}{\epsilon_M}\}$ incluye las incertidumbres en los datos, suponiendo independencia estadística. El problema es minimizar la rugosidad del modelo:

$$\|Dm\| \quad (1.2.33)$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ -1 & 1 & & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

para un ajuste (1.2.32) deseado.

Se plantea entonces el funcional

$$U = \|Dm\|^2 + \lambda\{\|Wd - WT(m)\|^2 - X_*^2\}, \quad (1.2.34)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange, y X_* es el ajuste deseado. Si las incertidumbres en los datos se suponen producidas por un proceso Gaussiano, con vector de media cero, y desviaciones estandar dadas por ϵ_j , entonces X^2 tiene una distribución χ^2 . El valor esperado de χ^2 es el número de datos, y equivale a un ajuste RMS de 1. X_*^2 no debe escogerse muy cerca del valor más pequeño posible, porque el modelo resultante sería tan rugoso, que no correspondería a un modelo físicamente razonable [44]. Como $T(m)$ es una funcional no lineal, se propone aproximar en una región cercana a un modelo inicial m_1 , por $T(m_1 + \Delta) = T(m_1) + J_1\Delta$, con $\Delta = m_2 - m_1$ y J_1 la matriz Jacobiana evaluada en m_1 . Sustituyendo en (1.2.34), y resolviendo para m_2 , como el modelo que minimiza U bajo la aproximación supuesta, se encuentra

$$m_2 = [\lambda D^t D + (WJ_1)^t WJ_1]^{-1} (WJ_1)^t W \hat{d}_1. \quad (1.2.35)$$

donde

$$\hat{d}_1 = d_1 - T(m_1) + J_1 m_1. \quad (1.2.36)$$

Se genera entonces una secuencia iterativa, el vector m_2 que resulta se usa como modelo de inicio para el siguiente paso y así sucesivamente.

El parámetro de regularización se obtiene en cada iteración encontrando el valor de U en (1.2.34), para un conjunto de valores de λ , tal que el ajuste es el más cercano a X_* [44].

Este algoritmo, conocido comúnmente como Occam, ha resultado el más popular a la fecha, por su convergencia rápida y estabilidad. La desventaja principal es que el tipo de modelos que produce son suaves, cuando la estructura deseada es del tipo de capas.

Modelos uniformes a trozos

Esparza y Gomez-Treviño [51] desarrollan un método que combina características de los dos grupos mencionados anteriormente. Su objetivo es obtener modelos tradicionales compuestos de un pequeño número de capas, sin tener que especificar este número *a priori*, haciendo al proceso de interpretación libre de esa información externa. Para esto utilizan una solución a la ecuación (1.2.1) en términos de una resistividad aparente compleja

$$r_a = \frac{1}{i\omega\mu_0} Z^2. \quad (1.2.37)$$

donde Z representa la impedancia en la superficie $Z = \frac{E(0,\omega)}{H(0,\omega)}$. La representación que encuentran para la conductividad aparente compleja ($\sigma_a = r_a^{-1}$) es

$$\sigma_a = \int_0^\infty \frac{i\omega\mu_0 Z^{-3}}{1+c} \left(\frac{E(z,\omega)}{H(0,\omega)} \right)^2 \sigma(z) dz, \quad (1.2.38)$$

donde $c = \frac{\partial(\log \sigma_a)}{\partial(\log \omega)} = \frac{\omega}{\sigma_a} \frac{\partial \sigma_a}{\partial \omega}$. La ecuación integral (1.2.38) representa otra manera de escribir la ecuación diferencial (1.2.1). Ésta representa a σ_a como un promedio

ponderado de la distribución de la conductividad desconocida. Debido a que los datos vienen en términos de magnitud y fase de Z , se replantea para la magnitud y fase de σ_a , resultando para la magnitud

$$|\sigma_a| = \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\omega\mu_0|Z|^{-2}}{(1+c_a)Z} \left(\frac{E(z,\omega)}{H(0,\omega)} \right)^2 \right\} \sigma(z) dz, \quad (1.2.39)$$

donde $c_a = \frac{\omega}{|\sigma_a|} \frac{\partial |\sigma_a|}{\partial \omega}$. Linealizando y dividiendo el intervalo $[0, +\infty)$ en un gran número de capas, de tal forma que la conductividad se considere uniforme en cada capa, se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas, la ecuación correspondiente a la frecuencia ω_i es dada por

$$|\sigma_a(\omega_i)| = \frac{\sigma_1}{1+c_a(\omega_i)} \sum_j^M \frac{\partial |\sigma_a(\omega_i)|}{\partial \sigma_j} + \frac{1}{1+c_a(\omega_i)} \times \sum_{j=1}^{M-1} \left[\sum_{l=j+1}^M \frac{\partial |\sigma_a(\omega_i)|}{\partial \sigma_l} \right] (\sigma_{j+1} - \sigma_j). \quad (1.2.40)$$

Donde σ_1 es la conductividad de la primera capa y M es el total de capas. La ecuación (1.2.40) puede escribirse matricialmente como

$$y = Ax \quad (1.2.41)$$

donde y es el vector con los datos de conductividad aparente, $x_0 = \sigma_1$, y $x_j = \sigma_{j+1} - \sigma_j$, $j = 1, \dots, M-1$. Los elementos de A están dados por

$$a_{ij} = \frac{1}{1+m_a(\omega_i)} \sum_{l=j+1}^M \frac{\partial |\sigma_a(\omega_i)|}{\partial \sigma_l}, j = 0, \dots, M-1. \quad (1.2.42)$$

Donde la derivada parcial de la magnitud de la conductividad aparente compleja se puede obtener usando las relaciones obtenidas para $\frac{\partial \rho_a}{\partial m_j}$ en (1.2.13), ya que $|\sigma_a| = 1/\rho_a$.

Tomando en cuenta los errores en los datos, se plantea resolver el sistema de desigualdades

$$y_i - e_i \leq A_{ij}x_j \leq y_i + e_i. \quad (1.2.43)$$

Donde e_i es el error en $|\sigma_a(\omega_i)|$. Se minimiza la norma L_1 de la diferencia en conductividad de capa a capa;

$$\min \sum_{j=1}^{m-1} |\sigma_{j+1} - \sigma_j|, \quad (1.2.44)$$

sujeta a las restricciones en (1.2.43), usando programación lineal con el algoritmo simplex.

Este método produce modelos uniformes a trozos, con la desventaja de que el algoritmo simplex requiere de un uso excesivo de recursos de cómputo.

Recocido Simulado

En recocido simulado, (RS) se desea simular el proceso de recocido físico que ocurre cuando un sólido es sometido a un baño de calor, incrementando la temperatura de modo tal que todas las partículas se distribuyan aleatoriamente en la fase líquida. Esto es seguido de un enfriamiento lento para que todas las partículas se acomoden en el estado de energía aterrizado donde ocurre la cristalización. En cada temperatura, al sólido se le permite alcanzar el equilibrio térmico, donde la probabilidad de estar en el estado i con energía U_i está dada por la distribución Boltzmann-Gibbs

$$P(E_i) = \frac{1}{Z(T)} e^{-\frac{U_i}{kT}}, \quad (1.2.45)$$

donde K es la constante de Boltzmann, T es la temperatura, y $Z(T)$ la función de partición, dada por

$$Z(T) = \sum_{j \in S} e^{-\frac{U_j}{kT}}. \quad (1.2.46)$$

El conjunto de todas las realizaciones posibles es denotado por S . La temperatura se reduce después de alcanzar el equilibrio, de modo que en el límite el estado de

mínima energía es el más probable. En los problemas de optimización, tales como los de inversión Geofísica, la función de energía se identifica con una función de error $U(m)$. Para la implementación de RS se hace la constante de Boltzmann $K = 1$ y se considera T en las mismas dimensiones que la energía, o el error. Se han propuesto varios algoritmos para evitar el cómputo de la función de error en cada punto del espacio de modelos, aproximando la distribución de Gibbs asintóticamente. Entre estos están [40] Metropolis, El baño de calor, Fast Simulated Annealing, Very Fast Simulated Annealing, entre otros. En Metropolis, se empieza con un modelo de arranque m_i , con energía $U(m_i)$, se genera una pequeña perturbación a m_i para obtener un nuevo modelo m_j , dado por $m_j = m_i + \Delta m_i$, con energía $U(m_j)$. Si ΔU_{ij} es la diferencia en la energía entre los dos estados, $\Delta U_{ij} = U(m_j) - U(m_i)$, entonces el nuevo modelo se acepta ó rechaza en base al valor de ΔU_{ij} , si $\Delta U_{ij} \leq 0$, el nuevo modelo siempre se acepta. Pero si $\Delta U_{ij} > 0$, entonces el nuevo modelo se acepta con probabilidad

$$P = e^{-\frac{\Delta U_{ij}}{T}}. \quad (1.2.47)$$

Si el proceso de generación-aceptación se repite un gran número de veces en cada temperatura, se puede demostrar que se alcanza el equilibrio térmico a esa temperatura. Si la temperatura se baja considerablemente, siguiendo un calendario tal que el equilibrio se alcance en cada temperatura, entonces, en el límite, cuando la temperatura se aproxima a cero, el estado de energía global mínimo se puede alcanzar. Geman y Geman[31] obtienen un calendario teórico de enfriamiento, demostraron que si se disminuye la temperatura conforme a $T_k = C/\log k$, donde k es el número de iteración, la probabilidad de llegar al estado de mínima energía tiende a 1. Sen y

Stoffa [40] aplicaron Metropolis al problema de inversión MT. Para esto se basan en la formulación directa de Oldenburg [11], para la perturbación (1.2.30). Generaron datos sintéticos libres de ruido para modelos de tres capas, y se dividió la profundidad en intervalos usando una escala logarítmica. Durante la inversión se mantienen los espesores fijos, y se permite a los valores de las resistividades de cada capa variar en el intervalo $[5,1000] \Omega - m$. El algoritmo tuvo que ser modificado un poco agregando regularización para evitar la generación de modelos altamente oscilatorios. El método ajusta a los datos, aunque no puede resolver para la primera capa. Ellos requieren de 1500 iteraciones con 100 evaluaciones a temperatura constante en cada iteración. El uso de recursos de cómputo es considerable en estos métodos.

Algoritmos Genéticos

Pérez-Flores y Schultz aplican algoritmos genéticos al problema de inversión MT en dos dimensiones [42]. El problema en dos dimensiones requiere de resolver las ecuaciones diferenciales parciales (1.1.4,1.1.7), debido a que no hay una solución cerrada para una estructura general, como es el caso para 1D en capas. Obtienen modelos satisfactorios para datos de campo, aunque también se requiere de grandes recursos de cómputo.

Redes Neuronales

Hidalgo y Gómez-Treviño [48] emplean redes neuronales para el problema de inversión. El objetivo es implementar dentro de una red neuronal el mapeo que corresponde al funcional inverso

$$m = T^{-1}(d). \quad (1.2.48)$$

Aunque no existe una representación analítica para T^{-1} , se desea obtener una aproximación al mismo mediante el esquema de aprendizaje en redes neuronales. Para esto se generan modelos de tres capas, con dos espesores y dos resistividades extraídos de una distribución uniforme, se sustituyen en la funcional directa (1.1.23) y se obtienen sus respuestas correspondientes. El resultado es un conjunto de “patrones de entrenamiento”, que se alimentan a la red neuronal siguiendo un procedimiento de aprendizaje. La arquitectura utilizada fué “Correlación en Cascada”, de Fahlman, la cual permite construir una red empezando de cero unidades ocultas, agregando unidades conforme se hace necesario con el fin de minimizar el error de ajuste RMS. La entrada a la red consiste de valores de resistividad aparente para un conjunto de frecuencias establecido. La salida debe ser un modelo de resistividad para un conjunto de valores de profundidad también establecido de antemano. El objetivo es generar una red que produzca un modelo que esté muy cerca del modelo real, haciéndolo de manera automática, sin necesidad de implementar algoritmos costosos de inversión.

La red es capaz de aprender los patrones, mostrando errores grandes sólo en muy pocos casos. Además se probó con patrones generados por modelos de cuatro capas, mostrando capacidad de extrapolación, produce modelos que ajustan muy bien a los datos, en algunos casos cerca del modelo real.

Zhang y Paulson [49] implementan otro algoritmo de inversión MT basado en la red neuronal de Hopfield. Ellos establecen el problema de inversión lineal para una ecuación Fredholm en términos que corresponden con la energía de una red de

Hopfield. El problema de inversión se plantea minimizando una funcional de costo

$$C = \frac{1}{2} \sum_{k=1} (d_k - \hat{d}_k)^2 \quad (1.2.49)$$

donde d_k representa los datos, \hat{d}_k la respuesta de una integral Fredholm discretizada

$$\hat{d}_k = \sum_i K_{ki} m_i. \quad (1.2.50)$$

Se plantea entonces la función de estabilidad para una red Hopfield, de tal manera que concuerde con la funcional de costo. Para el problema MT se usa la formulación de Oldenburg, con el kernel de Fréchet (1.2.30). Zhang y Paulson tienen que implementar regularización en la red neuronal, debido a que los modelos que obtiene son extremadamente discontinuos. La regularización consiste en establecer restricciones a los pesos de las conexiones que llegan a cada unidad. En la red Hopfield original, cada unidad recibe una alimentación de la salida de todas las unidades restantes. En la red Hopfield regularizada, a cada unidad se le aplica un filtro pasa-bajas a la entrada, antes de que ésta sea alimentada a la unidad.

El modelo que produce la red regularizada no es del todo satisfactorio para el ejemplo sintético que presenta, debido a que no recupera algunas partes de la estructura del modelo.

1.3 Método de Corriente Directa

El método de sondeo de resistividad data de más de ochenta años. Su propósito es investigar el cambio en la resistividad del subsuelo con la profundidad. Para esto, se inyecta corriente en la Tierra usando contactos galvánicos.

La configuración más común es la propuesta por Schlumberger. En este método, se posicionan cuatro electrodos simétricamente en una línea recta, los electrodos que

inyectan la corriente en el exterior, y los que miden el potencial en el interior. Para una Tierra isotrópica y homogénea, la relación entre la diferencia de potencial ΔU y la corriente inyectada I , es la resistividad de la Tierra, multiplicada por un factor geométrico que considera el espaciamiento entre los electrodos; $\rho = K \frac{\Delta U}{I}$. Para una Tierra heterogénea, la cantidad que se mide no es la resistividad real, sino una aparente. El modelo usual es considerar una estructura en capas, la capa inferior se extiende a profundidad infinita, las otras capas tienen espesor finito. Considerando que la resistividad ρ es el recíproco de la conductividad σ , y suponiendo una Tierra isotrópica, la ley de Ohm toma la forma

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.3.1)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente y \mathbf{E} la intensidad del campo eléctrico. El campo eléctrico puede representarse como el gradiente de un potencial escalar ψ ;

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi, \quad (1.3.2)$$

además, se sabe que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.3.3)$$

Tomando coordenadas cilíndricas (r, z, θ) y considerando simetría alrededor del eje z , la ecuación anterior se expresa en términos del potencial como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0. \quad (1.3.4)$$

Esta ecuación se puede resolver por separación de variables. Para esto, se escribe $\psi(r, z) = R(r)Z(z)$, el producto de una función de r y otra de z . Entonces (1.3.4) se separa en dos ecuaciones que deben ser satisfechas simultáneamente,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (1.3.5)$$

y

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz} \frac{dZ}{dz} - \lambda^2 Z = 0, \quad (1.3.6)$$

en las cuales λ es una constante de separación arbitraria. Una solución general puede ser escrita de la forma

$$\psi = \int_0^\infty F(\lambda) R(\lambda, r) Z(\lambda, z) d\lambda, \quad (1.3.7)$$

donde $F(\lambda)$ es una función de λ que debe escogerse para cumplir con las condiciones de frontera.

El campo eléctrico se considera que es el generado por una fuente puntual localizada sobre la superficie de la Tierra, y la corriente emitida por la fuente es del tipo corriente directa. Suponiendo un modelo de Tierra de dos capas, suponiendo además que la resistividad ρ_1 de la primera capa es constante de $0 < z < h$, y una corriente I se inyecta en el origen. La densidad de corriente radial muy cerca del electrodo está dada por

$$J_R = I / (2\pi R^2), \quad (1.3.8)$$

donde $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$. El campo eléctrico correspondiente es $E_R = \rho_1 J_R$, al menos en la vecindad inmediata al electrodo. El potencial correspondiente es $\psi \approx \psi^p = \frac{I\rho_1}{2\pi R}$.

El superíndice p denota al potencial primario. Introduciendo la relación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (1.3.9)$$

para $z > 0$, donde $J_0(\lambda r)$ es la función Bessel del primer tipo de orden cero, y λ la variable de integración. El potencial resultante en la capa superior se puede escribir entonces como

$$\psi_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \{[1 + A(\lambda)]e^{-\lambda z} + B(\lambda)e^{\lambda z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.3.10)$$

para la región $0 < z < h$ y $0 < r < \infty$, donde se puede representar a $\psi_1 - \psi^p$ como el potencial secundario ψ^s , que se desvanece cuando $h \rightarrow \infty$. La forma apropiada para el potencial en la segunda capa está dada por

$$\psi_2 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty C(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (1.3.11)$$

Aplicando condiciones de frontera para determinar A, B , y C , se observa que:

- la densidad de corriente vertical debe ser cero en $z = 0$ para $0 < r < \infty$.
- Los potenciales son continuos en $z = h$.
- La normal de la densidad de corriente es continua en $z = h$.

Estas condiciones requieren que:

$$\frac{\partial \psi_1^s}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0. \quad (1.3.12)$$

$$\psi_1 = \psi_2 \text{ en } z = h \quad (1.3.13)$$

y

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \quad (1.3.14)$$

en $z = h$. Aplicando las condiciones anteriores a (1.3.10) y (1.3.11), y resolviendo para A, B y C se obtiene que el potencial para un observador en la superficie de la Tierra está dado por

$$\psi_1(r, 0) = \frac{I\rho_1}{2\pi r} G(r, K), \quad (1.3.15)$$

donde

$$G(r, K) = 1 + 2Kr \int_0^\infty \frac{e^{-2\lambda h}}{1 - Ke^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (1.3.16)$$

y $K = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$.

Generalizando, se observa que el potencial en la superficie se puede expresar como la integral del producto de una función kernel por una función Bessel del primer tipo de orden cero. La función Kernel es recursiva en términos de los parámetros de cada capa. De la expresión para el potencial en la superficie se puede obtener la diferencia de potencial entre los electrodos de medición y derivar entonces una relación para la resistividad aparente.

En la configuración Schlumberger, se considera que el espaciamiento entre electrodos de potencial es cero, y se puede usar entonces la relación $\Delta\psi/2b \rightarrow -2(\partial\psi/\partial r)_{r=s}$, la resistividad aparente que se obtiene para un medio de capas es [20]:

$$\rho_a = \rho_1 + s^2 \int_0^\infty (T(\lambda) - \rho_1) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda, \quad (1.3.17)$$

donde ρ_a es la resistividad aparente para el espaciamiento entre electrodos de corriente $2s$, J_1 es la función Bessel de orden uno. $T(\lambda)$ es la llamada "Transformada de Resistividad" [20] evaluada en la superficie, y obtenida recursivamente, empezando del basamento, $T_m = \rho_M$, para un medio de M capas;

$$T_i = [T_{i+1} + \rho_i \tanh(\lambda t_i)] / [1 + T_{i+1} \tanh(\lambda t_i) / \rho_i], \quad (1.3.18)$$

ρ_i y t_i representan la resistividad y el espesor de la capa i , respectivamente.

Es común trabajar con el logaritmo de la resistividad aparente y de la transformada de resistividad, en lugar de las variables originales. La ventaja del escalamiento logarítmico sobre la variable independiente es que las curvas tienen una apariencia más regular, en el sentido de que los períodos de las oscilaciones tienden a permanecer en el mismo orden de magnitud en toda la curva, lo que facilita el aplicar muestreos igualmente espaciados en el momento de aplicar filtros para evaluar la integral. Para

esto se introducen $x = \ln(s)$, y $y = -\ln(\lambda)$, entonces la expresión para la configuración Schlumberger es ahora:

$$\rho_a = \rho_1 + \int_{-\infty}^{\infty} (T(y) - \rho_1) J_1(e^{x-y}) e^{2(x-y)} dy. \quad (1.3.19)$$

Se requiere evaluar la integral del producto del Kernel por la función Bessel. Con el fin de realizar esta evaluación de una manera eficiente, se han desarrollado métodos aproximados basados en filtrado digital. Por ejemplo, se observa que (1.3.19) es una integral de convolución. Como la transformada de Fourier de una convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de las funciones, se puede ver a $J_1(e^{x-y})$ como a un filtro, del que se pueden evaluar algunos coeficientes, tal que se cumpla con el teorema de muestreo. Siguiendo este procedimiento se han obtenido varios filtros, unos permiten obtener la respuesta de un modelo, otros la transformada de resistividad dada la resistividad aparente [21], otros más, permiten pasar de una configuración a otra [20].

Para incrementar el alcance en profundidad de las mediciones de ρ_a , los electrodos de corriente se desplazan hacia afuera, mientras los de potencial permanecen en la misma posición.

En la práctica, cuando la relación entre las distancias entre los electrodos de corriente a la de los de potencial llega a ser muy grande, los electrodos de potencial deben desplazarse hacia afuera, de otra manera la diferencia de potencial eventualmente llega a ser demasiado pequeña como para ser medida con suficiente exactitud. Cuando los electrodos de potencial se desplazan hacia afuera, es necesario realizar mediciones en dos valores de espaciamientos entre electrodos de potencial, para un mismo valor de espaciamiento en electrodos de corriente. Este procedimiento provee de información razonable sobre el efecto del desplazamiento de los electrodos de potencial en las

lecturas. Las curvas de resistividad aparente para varios segmentos en un conjunto de mediciones de un sitio pueden no ajustar una con otra. Esto puede ser debido al cambio en el espaciamiento de los electrodos de potencial, y se resuelve en este caso mediante filtros lineales [20]. La otra razón para la falta de ajuste es producida por inhomogeneidades someras en el suelo. Para este caso, se hace un ajuste multiplicando todos los valores de resistividad aparente en un segmento por el mismo factor, *i.e.* un desplazamiento paralelo de todo el segmento en escala logarítmica. Este ajuste generalmente se realiza a mano. Se planteará en el capítulo 4 cómo se puede incluir este ajuste dentro del problema de inversión, para automatizar todo el procedimiento.

1.3.1 Técnicas de solución

La interpretación ó problema inverso consiste en recuperar la distribución de la resistividad del subsuelo a partir de las lecturas de resistividad aparente tomadas a diferentes espaciamientos de electrodos de corriente. Inicialmente, el proceso de interpretación se realizó por medio de la comparación visual entre curvas maestras publicadas para cierto tipo de modelos, contra la curva obtenida en el campo. Posteriormente se desarrollaron métodos aproximados que generaban modelos globales en base a realizar aproximaciones locales a secciones de la curva de resistividad mediante modelos locales de dos capas. Después, se automatizó un poco el procedimiento mediante los métodos iterativos: usando una terminal gráfica, se comparan los datos de campo con datos derivados de un modelo de capas. Si la concordancia entre las curvas no es satisfactoria, se ajustan los parámetros de las capas del modelo. El procedimiento se repite hasta que se obtiene un acuerdo significativo entre las curvas. La comparación entre curvas se puede realizar de dos formas: en el dominio de la

resistividad aparente, se obtienen los valores de la resistividad aparente del modelo y se comparan directamente con las lecturas de campo; en el dominio de la transformada de resistividad, primero se obtienen valores muestra de la transformada de resistividad, en base a los datos de resistividad aparente de campo y se comparan con valores de transformada de resistividad obtenidos de un modelo. El principal objetivo de trabajar en el dominio de la transformada fué el economizar recursos de cómputo (tiempo y memoria), muy escasos en esos días, sin embargo, posee la desventaja de que errores sistemáticos en las lecturas pueden ser amplificados por el procedimiento de transferencia lecturas-transformada [20]. La interpretación automática fué propuesta por Vozoff en 1958, aunque en ese tiempo todavía no estaban disponibles los métodos de filtrado lineal para obtener la transformada. Básicamente se propuso la técnica de descenso de gradiente para minimizar una medida de discrepancia; el error $E = \frac{1}{n} \sum (\rho_a^m - \rho_a^f)^2 / (\rho_a^f)^2$. donde el superíndice denota resistividad aparente obtenida en campo (f) o computada (m).

Además, se han aplicado los métodos de solución descritos para el problema MT al caso CD.

Inman aplicó Gauss-Newton,[22] Jupp y Vozoff usan inversas aproximadas amortiguadas [7]. Recientemente se han aplicado métodos de minimización globales como recocido simulado [41], con buenos resultados de ajuste, aunque a expensas de un número excesivo de evaluaciones de la funcional directa.

Otra aproximación ha sido utilizar redes neuronales para el aprendizaje del mapeo inverso en el problema de resistividad [23].

Esparza y Gómez-Treviño generan modelos discontinuos mediante minimización por programación lineal [50], en un esquema similar al mostrado para el caso MT.

Capítulo 2

Problemas mal planteados y técnicas de regularización

2.1 Introducción

Si el modelo m de un objeto y la fuente del campo excitador se conocen, se puede proceder directamente a resolver el problema directo, i.e., se puede calcular ó modelar la distribución del campo electromagnético y las funciones respuesta correspondientes en cualquier punto del campo de lecturas. Esto es, se puede encontrar F tal que

$$\mathbb{F} = (f_1, f_2, \dots, f_N), \quad (2.1.1)$$

corresponda a la respuesta del campo excitador. f_1, \dots, f_N corresponden al campo respuesta en un sitio de observación, para diferentes frecuencias en MT, ó espaciamentos de electrodos de corriente para el caso CD. En adelante, se considera a los vectores sin negritas, con el fin de facilitar la notación y se indica mediante subíndices a los elementos de un vector particular. Comparando F con los resultados d de las

lecturas se puede juzgar si el modelo m ajusta los datos experimentales ó no. Al vector F se llamará datos sintéticos. Denotando al operador de la solución del problema directo por el símbolo T se tiene

$$T(m) = F. \quad (2.1.2)$$

El operador $T(\cdot)$ es en general, no-lineal respecto de los parámetros m . Denotando al conjunto de todos los modelos posibles para el objeto que se busca como \mathcal{M} , $m \in \mathcal{M}$. Entonces el conjunto $\mathcal{F} = T(\mathcal{M})$ será una imagen del conjunto \mathcal{M} generado por el mapeo debido al operador $T(\cdot)$. El problema inverso consiste en: dado d encontrar m tal que

$$T(m) = d. \quad (2.1.3)$$

En contraste con la ecuación (2.1.2), en el lado derecho están las observaciones conocidas, y se desea obtener el modelo m . Es evidente que (2.1.3) tiene solución en \mathcal{M} sólo para aquellas d que pertenezcan al conjunto \mathcal{F} . Sean los datos $d \in \mathcal{D}$ y las soluciones deseadas $m \in \mathcal{M}$. Ambos \mathcal{D} y \mathcal{M} son espacios métricos, i.e., se definen distancias entre elementos arbitrarios en ambos espacios, $\rho_d(d_1, d_2)$ y $\rho_m(m_1, m_2)$. Para los problemas de inversión electromagnéticos, se tiene una diferencia fundamental entre los problemas directo e inverso. El problema inverso es mal ó impropriamente planteado en el sentido de Hadamard.

Hadamard afirmó que un modelo matemático tal como (2.1.3) para un problema físico ha sido bien planteado si posee las siguientes propiedades [3]:

1. Para cada elemento $d \in \mathcal{D}$ existe una solución $m \in \mathcal{M}$ al problema.
2. La solución es única.

3. el problema es estable dentro de los espacios \mathcal{M}, \mathcal{D} , i.e. para un valor arbitrario $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que la desigualdad $\rho_d(d_1, d_2) \leq \delta(\varepsilon)$ resulta en $\rho_m(m_1, m_2) < \varepsilon$.

La estabilidad requiere que cambios pequeños en los datos conduzcan a cambios pequeños en la solución. El problema que no satisface al menos una de las tres condiciones se llama mal ó impropriamente planteado. Considerando al problema inverso, en el lado derecho de la ecuación (2.1.3) existen datos experimentales, que invariablemente estarán contaminados por errores de medición y procesamiento, por lo que generalmente estarán fuera del conjunto \mathcal{F} . En este caso no existe solución al problema inverso. Si los datos experimentales pertenecen al conjunto \mathcal{F} , la solución

$$m = T^{-1}d \quad (2.1.4)$$

existe, pero será inestable si el operador inverso T^{-1} no es continuo. En inversión Geofísica, el operador T^{-1} existe analíticamente sólo para algunos problemas particulares. Con datos imprecisos sólo tiene sentido buscar una aproximación a la solución. La técnica de regularización trata de incorporar información suplementaria. Por ejemplo, habiendo examinado las propiedades analíticas del operador T^{-1} , el investigador puede formular los requerimientos que los datos experimentales deben cumplir, para que estos pertenezcan al conjunto \mathcal{F} , dentro del cual la solución al problema inverso está definida.

Otra pieza de información suplementaria puede ser proporcionada por la suavidad de la solución, realizada por medio de un procedimiento de regularización suavizante [26]. En el marco de regularización, uno sustituye un problema apropiadamente planteado por el mal planteado y considera la solución al primero como una solución

aproximada al segundo. Para el problema inverso se han propuesto una gran cantidad de métodos, algunos de los cuales son: Prueba y error, prueba y error combinado con regularización, prueba y error basado en información estadística, métodos heurísticos, formulación probabilística con procedimiento MonteCarlo, entre otros.

2.2 Métodos determinísticos

Se notó anteriormente que el problema inverso que consideramos

$$T(m) = d$$

en general, no es propiamente planteado, debido a que el operador inverso no es contínuo y los datos experimentales están contaminados con errores. Se debe regularizar el problema, i.e. se debe restringir mediante condiciones subsidiarias. Las condiciones han sido usadas por un número de autores [5, 6, 7] para obtener soluciones estables.

2.2.1 Problemas lineales

Típicamente, \mathcal{M} y \mathcal{F} son subconjuntos cerrados de espacios de Sobolev de funciones [39], y T es un operador integral. En aplicaciones con datos reales, m , y F se reemplazan por versiones discretas, consistentes en valores de funciones, y T llega a ser una matriz A , con alguna estructura heredada del problema contínuo. Para un problema en el que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $d \in \mathbb{R}^m$, existe un vector (\hat{m}) que minimiza $\|Am - d\|$ (la norma Euclideana en el espacio de los datos) sobre todos los m , cuando el rango de A es n , y éste estimador es: [13]

$$\hat{m} = (A^t A)^{-1} A^t d, \quad (2.2.1)$$

donde A^t denota la transpuesta de A . Cuando A es de rango deficiente ([13]), ó llega a ser mal condicionada, ésta solución se vuelve inútil. Se puede mejorar la condición de $A^t A$ modificándola. Una manera de hacerlo es agregando un múltiplo de la matriz identidad. Como $A^t A$ es simétrica y positiva definida, la matriz $A^t A + \lambda^2 I$ tiene sus valores propios en $[\lambda^2, \lambda^2 + \|A\|^2]$ y por tanto un número de condición $\leq (\lambda^2 + \|A\|^2)/\lambda^2$, que se hace más pequeño cuando λ crece. Con este reemplazo, la ecuación anterior se convierte en:

$$\hat{m} = (A^t A + \lambda^2 I)^{-1} A^t d. \quad (2.2.2)$$

Ésta se obtiene de regularizar el problema original, y minimizar

$$\|Am - d\|^2 + \lambda^2 \|m\|^2 \quad (2.2.3)$$

respecto de m .

Neumaier [8] considera la regularización como una familia de inversas aproximadas C_λ , definidas en función de $A^t A$;

$$C_\lambda = \lambda^{-2} \phi(\lambda^{-2} A^t A) A^t. \quad (2.2.4)$$

para cualquier función $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se mantengan la norma de C_λ y la norma del residual acotadas [8]. Para obtener regularización Tikhonov, se escoge $\phi(t) = (t+1)^{-1}$. Esto es, cualquier método de regularización, posee una representación en términos de inversas aproximadas C_λ . Para obtener soluciones más suaves, se puede usar regularización Tikhonov iterada, empezando con:

$$m^0 = 0, \quad r^0 = d,$$

y, para $l = 1, 2, \dots$,

$$m^l = m^{l-1} + (A^t A + \lambda^2 I)^{-1} A^t r^{(l-1)}, \quad r^l = d - A m^l. \quad (2.2.5)$$

Para este caso, $\phi_l(t) = \frac{1}{t} (1 - \frac{1}{(t+1)^t})$.

Si se conoce la descomposición en valores singulares (DVS) de A [13],

$$A = U \Sigma V^t,$$

para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, U cuadrada ortogonal, $m \times m$, V cuadrada ortogonal $n \times n$, y Σ una matriz diagonal $m \times n$ con entradas $\Sigma_{ii} = s_i$. Entonces, para el caso de mínimos cuadrados, la solución de norma mínima es dada por:

$$\hat{m} = V \Sigma^+ U^t d = \sum_{s_i \neq 0} \frac{1}{s_i} (U^t d)_i V_i, \quad (2.2.6)$$

donde la i ésima columna de V , V_i , es el vector singular correspondiente con el i ésimo valor singular s_i , y $\Sigma^+ = \text{Diag}(s_k^+)$, $s_k^+ = 1/s_k$ si $s_k \neq 0$, y es cero de otra manera. Las matrices mal condicionadas se caracterizan por pequeños valores singulares, y se observa de la representación (2.2.6) que los errores en d se ven amplificados por estos elementos. Para el caso general (2.2.4), usando la DVS, se observa que $A^t A = V \Sigma^t \Sigma V^t$ y $(A^t A)^l = V (\Sigma^t \Sigma)^l V^t$ para $l = 0, 1, 2, \dots$, luego,

$$\phi(\lambda^{-2} A^t A) = V \text{Diag}(\phi(s_k^2/\lambda^2)) V^t$$

para todos los polinomios ϕ . Neumaier observa que entonces (2.2.4) se convierte en

$$C_\lambda = V \Sigma_\lambda U^t d, \quad (2.2.7)$$

con $\Sigma_\lambda = \text{Diag}(\frac{s_k}{\lambda^2} \phi(\frac{s_k^2}{\lambda^2}))$. Donde se reemplaza la matriz mal condicionada Σ^+ en (2.2.6), por una matriz diagonal mejor comportada, Σ_λ . De ésta matriz, se puede

seleccionar $\phi(t)$ en términos de los valores singulares s_k , de tal forma que se mejore la condición del problema inverso [8]. Así se obtienen técnicas como la descomposición en valores singulares truncados.

Tratamiento estocástico del error

Considerando que los datos están contaminados por ruido de la siguiente manera:

$$d = Am + n, \quad (2.2.8)$$

Se puede considerar que d, m y n son realizaciones de las variables aleatorias conjuntamente distribuidas y, β y ϵ , respectivamente, las cuales satisfacen

$$y = A\beta + \epsilon. \quad (2.2.9)$$

Suponiendo que β y ϵ no están correlacionadas y que

$$E\{\epsilon\epsilon^t\} = Q$$

$$E\{\beta\beta^t\} = R$$

y

$$E\{\epsilon\beta^t\} = 0.$$

Donde $E\{z\}$ denota la esperanza de una variable aleatoria ó un vector aleatorio z . Suponiendo además que R y Q son matrices positivo-semidefinidas y que $ARA^t + Q$ no es singular. Entonces el estimador lineal óptimo $\hat{\beta} = \hat{C}y$ de β que minimiza $E[\|\hat{\beta} - \beta\|^2]$ es ([14],[15])

$$\hat{\beta} = RA^t(ARA^t + Q)^{-1}y. \quad (2.2.10)$$

Bertero ([14]) observa que ésta solución equivale a la obtenida mediante regularización, minimizando $\|Am - d\|^2 + \lambda^2\|Sm\|^2$, con S un operador que restringe la suavidad del modelo. Las soluciones coinciden cuando $Q = I$, y $R^{-1} = S^t S \lambda^2$.

Tradicionalmente, se ha tratado el problema de regularización modelando suavidad por medio de una matriz de diferencias de primer ó segundo orden. El sistema mínimos cuadrados que se resuelve es:

$$\varepsilon^{-2}(d - Am)^t W^{-1}(d - Am) + \tau^{-2}\|Sm\|^2 = \min!. \quad (2.2.11)$$

Con $\lambda^2 = \Delta^2 := s^2/\tau^2$ como parámetro de regularización, la solución se obtiene de las ecuaciones normales

$$B_\lambda \hat{m} = A^t W^{-1} d, \quad (2.2.12)$$

donde

$$B_\lambda = A^t W^{-1} A + \lambda^2 S^t S.$$

Estas ecuaciones corresponden otra vez a una generalización de la regularización Tikhonov, que se obtiene como el caso especial $W = I$, $S = I$.

Generalmente (2.2.12) se resuelve usando factorización Cholesky para cada valor de λ . Si la estructura de dispersión de B_λ es tal que el cómputo de varias factorizaciones Cholesky no es práctica, se tienen que usar métodos iterativos. Cuando la solución deseada es continua a pedazos, el tratamiento que se ha dado consiste en usar términos de regularización no-lineales, como en el caso de variación total [16], ó en el marco probabilístico usando modelos de Campos Aleatorios Markovianos [25], entre otros.

2.2.2 Modelos con discontinuidades

En la consideración de discontinuidades en el modelo se han propuesto varias técnicas para problemas de inversión. Entre ellas, podemos notar el uso de programación lineal y las técnicas variacionales. De los métodos variacionales se observará la formulación de Charbonnier.

Método Variacional

Existen una gran cantidad de trabajos relacionados con el uso de técnicas variacionales en la solución de problemas de procesamiento de bordes en imágenes [27], entre los que se pueden mencionar la técnica de difusión anisotrópica de Perona y Malik [28], el modelo constante a trozos de Mumford-Sha [29], la discontinuidad adaptable de Li, [38], y la aproximación de Charbonnier et. al. [30].

En esta sección se considera el método de procesado de bordes continuo propuesto por Charbonnier et. al. [30]. Ellos consideran un problema de regularización lineal, $d = Am + n$, con $A = I$, pero también lo han extendido a reconstrucción de objetos. Para estimar m de d , se minimiza el criterio:

$$U(m) = \int_{\Omega} |m(x) - d(x)|^2 dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \phi[|\nabla m(x)|] dx \quad (2.2.13)$$

donde Ω es un conjunto acotado abierto en \mathbb{R}^2 , $|\nabla m(x)|$ es el módulo del gradiente de $m(x)$, y λ es el parámetro de regularización. La función que preserva los bordes ϕ se supone par, de clase $C^2(\mathbb{R})$.

En [30] se establecen las propiedades que debe cumplir la función ϕ para preservar bordes;

- $\phi(t) \geq 0$ para cada t , con $\phi(0) = 0$.

- $\phi(t) = \phi(-t)$.
- ϕ posea derivadas continuas.
- $\phi'(t) \geq 0$ para cada $t \geq 0$.
- $\phi'(t)/2t$ continua y estrictamente decreciente en $[0, +\infty)$.

Además se debe cumplir que;

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi'(t)}{2t} = 0.$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(t)}{2t} = M, \quad 0 < M < +\infty.$$

De las funciones que cumplen con estas propiedades, se menciona principalmente a $\phi_{GM} = t^2/(1+t^2)$, usada por Geman y McClure en tomografía PET.

Se muestra que el problema original (2.2.13) puede representarse como el ínfimo de funcionales cuadráticos introduciendo una variable auxiliar b , y una función convexa ψ :

$$U(m) = \inf \left(\int_{\Omega} |m(x) - d(x)|^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} \{b(x)|\nabla m(x)|^2 + \psi[b(x)]\} \right) \quad (2.2.14)$$

donde $\psi(b) = \theta[(\theta')^{-1}(b)] - b(\theta')^{-1}(b)$, y $\theta(t) = \phi(\sqrt{t})$. El valor de b cuando el funcional es mínimo, para m fija, está dado por

$$b_{\text{inf}}(x) = \frac{\phi'[\|\nabla m(x)\|]}{2\|\nabla m(x)\|}. \quad (2.2.15)$$

La variable b pesa el suavizamiento cuadrático en $|\nabla m|$: cuando $|\nabla m|$ es pequeña, b tiende a su valor máximo (1), y la regularización es cuadrática; cuando $|\nabla m|$ es alta,

b tiende a cero y el término de suavizado se desvanece. b da una representación de los bordes en la imagen. La función ψ se define de la función ϕ y actúa como penalizador por la introducción de un borde ($b \rightarrow 0$). El criterio de energía aumentado, (2.2.14) debe minimizarse respecto de (m, b) . Mientras que el criterio original (2.2.13) no es cuadrático respecto de m , el nuevo criterio, (2.2.14) es cuadrático respecto de m cuando b está fija. Manteniendo b fija, la minimización respecto de m es un problema lineal. El algoritmo se basa en minimizaciones alternantes en m y b , como se muestra en la figura 2.1.

```
repeat
   $b = \frac{\phi'(|\nabla m|)}{2|\nabla m|}$  con  $m$  fijo
  resuelve  $(m - d) - \text{div}(b\nabla m) = 0$  para  $m$  con  $b$  fija
until { convergencia }
```

Figura 2.1: Algoritmo de regularización por el método variacional

Para el problema no lineal se puede obtener una versión del algoritmo anterior, mediante aproximación por los primeros términos en la serie de Taylor.

2.2.3 Regularización determinística no-lineal.

La teoría de problemas lineales mal-planteados está bien desarrollada y se puede considerar completa. Sin embargo, para el caso no-lineal la teoría dista de estar tan bien desarrollada como en el caso lineal. Como se observó al principio del capítulo, se desea resolver

$$T(m) = y,$$

donde $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}$ es un operador no-lineal entre espacios de Sobolev \mathcal{M} y \mathcal{F} . Debido al mal-planteamiento del problema no-lineal, se supone que las soluciones

no dependen continuamente de los datos. Las suposiciones generales son:

- T es continuo y
- T es débilmente cerrado, i.e. , para cualquier secuencia $\{m_k\} \subset \mathcal{D}(T)$,

convergencia débil de m_k a m en \mathcal{M} y convergencia débil de $T(m_k)$ a y en \mathcal{F} implica que $m \in \mathcal{D}(T)$ y $T(m) = y$. De manera más general que para el caso lineal, donde se busca una solución de norma mínima, para el problema no-lineal se busca una solución m^\dagger con norma mínima respecto de un modelo m^* ;

$$T(m^\dagger) = y$$

y

$$\|m^\dagger - m^*\| = \min\{\|m - m^*\| \mid T(m) = y\}.$$

La selección de m^* es crucial, la información a-priori disponible sobre las soluciones de $T(m) = y$ tiene que incorporarse en su selección. En el caso de soluciones múltiples, m^* hace el papel de criterio de selección. Se supone la existencia de una solución norma mínima x^* , x^\dagger para los datos $d \in \mathcal{Y}$. Engl et. al. [9] observan que el problema:

$$\|T(m) - y\|^2 + \alpha \|m - m^*\|^2 \rightarrow \min, \quad m \in \mathcal{D}(T) \quad (2.2.16)$$

donde $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$ es una aproximación al dato exacto d del problema y $m^* \in \mathcal{M}$ admite una solución bajo las suposiciones anteriores sobre T . Además obtienen resultados de convergencia, que muestran que el problema regularizado converge a un mínimo local.

La funcional suavizante de Tikhonov es en general:

$$\|T(m) - y\|^2 + \alpha\Psi(m).$$

Donde $\Psi(m)$ es la funcional estabilizadora [26] que permite incluir información cualitativa a priori acerca de la solución; similaridad a alguna propiedad (como es el caso de norma mínima), cercanía a funciones suaves, o existencia de discontinuidades.

Entre los métodos de solución que se han propuesto está el aplicar una aproximación al funcional por los primeros términos de la serie de Taylor, para así obtener algoritmos iterativos, como el que se mostró en la sección anterior. Dentro de esta técnica se han obtenido diferentes variantes del algoritmo de Newton.

En el método de Newton, se trata de resolver el problema $T(m) = y$ sin regularizar, linealizando:

$$T'(m^k)(m^{k+1} - m^k) = y - T(m^k) \quad (2.2.17)$$

para m^{k+1} . Sin embargo (2.2.17) generalmente no tiene una solución, por lo que es necesario regularizar. Aplicando regularización Tikhonov a (2.2.17), se obtiene

$$m^{k+1} = m^k + (T'(m^k)^*T'(m^k) + \alpha_k I)^{-1}T'(m^k)^*(y - T(m^k)). \quad (2.2.18)$$

Donde T^* es el operador adjunto de T . Considerando la estrategia de selección de α , se observa que puede haber una equivalencia con el método "Levenberg-Marquardt", el cual también puede ser desarrollado linealizando T alrededor de m^k dentro del funcional Tikhonov no-lineal. Otras variantes de métodos tipo Newton se pueden obtener, de acuerdo a la aproximación que se desee. Una generalización similar a la mostrada para problemas lineales en la sección anterior ha sido propuesta por Tautenhan [17].

2.3 Formulación probabilística

Esta sección se basa en los trabajos de Tarantola, de Sen y Stoffa [39, 40] y describe los procedimientos bayesianos que se han aplicado al problema inverso en Geofísica.

2.3.1 Estimación Bayesiana

En la formulación Bayesiana, se hace un uso explícito de modelos de probabilidad para incorporar conocimiento general y específico a priori sobre el modelo y trata de proveer de un marco unificado dentro del cual se puede considerar la regularización.

Esta aproximación consiste de:

- Construir una distribución de probabilidad a priori $\{p(m)\}$ para el modelo. Ésta distribución debe capturar conocimiento general y específico sobre el modelo.
- Se forma la densidad de probabilidad condicional $l(d|m)$ para los datos d dado un modelo en particular, m .
- Se combinan la densidad a priori y la verosimilitud para formar la densidad a posteriori $p(m|d)$.

Suponemos que $l(d|m)$ es la función densidad de probabilidad (fdp) condicional de d para un modelo m dado, $p(m|d)$ es la fdp condicional de m , dados los datos d , $p(d)$ es la fdp de los datos, y $p(m)$ es la fdp del modelo m , independiente de los datos. Se tiene, de la definición de probabilidades condicionales

$$p(m|d)p(d) = p(d|m)p(m) \quad (2.3.1)$$

de donde se obtiene la expresión para la distribución condicional del modelo m dados los datos d :

$$p(m|d) = \frac{p(d|m)p(m)}{p(d)} \quad (2.3.2)$$

la cual representa el estado de información del modelo m dados los datos d . En inversión Geofísica, el término del denominador, $p(d)$ que es independiente del modelo, es una constante. Cuando los datos medidos d_o se sustituyen en la expresión para la fdp condicional $p(d|m)$, ésta se llama la función de verosimilitud, denotada por $l(d_o|m)$, entonces la ecuación anterior se puede escribir

$$p(m|d_o) \propto l(d_o|m)p(m). \quad (2.3.3)$$

La fdp $p(m)$ es la probabilidad del modelo m , independiente de los datos, i.e. describe la información que se tiene del modelo sin el conocimiento de los datos, y se llama la distribución a priori. Similarmente, la fdp $p(m|d)$ es la descripción del modelo, dados los datos, y se llama la función densidad de probabilidad posterior (DPP) cuando se normaliza. La elección de la función de verosimilitud depende de la distribución del ruido ó error en los datos. Muchos problemas inversos se pueden tratar usando un modelo estandar, dado por la siguiente ecuación

$$d = T(m) + n \quad (2.3.4)$$

donde $T(\cdot)$ es el operador de modelado directo, y el vector n contiene muestras del error ó ruido en los datos. Se supone que el ruido es independiente de $T(m)$, caracterizado por la fdp $p_n(n)$. Entonces $p_n(n) = p_n(d - T(m))$, que corresponde a la fdp condicional $p(d|m)$, i.e.,

$$p(d|m) = p_n(d - T(m)). \quad (2.3.5)$$

Suponiendo que el error es Gaussiano, la función de verosimilitud toma la forma siguiente:

$$l(d_o|m) \propto \exp(U(m)) \quad (2.3.6)$$

donde $U(m)$ es la función de error dada por

$$U(m) = -\frac{1}{2}(d_o - T(m))^t C_D^{-1}(d_o - T(m)), \quad (2.3.7)$$

donde C_D es la matriz covarianza de los datos. La expresión para la DPP se escribe entonces como:

$$p(m|d_o) \propto \exp(U(m))p(m), \quad (2.3.8)$$

Sustituyendo una fdp Gaussiana también para el modelo a priori $p(m)$, caracterizado por un modelo medio m_p y matriz covarianza a priori C_m ;

$$p(m) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(m - m_p)^t C_m^{-1}(m - m_p)\right], \quad (2.3.9)$$

en la ecuación (2.3.8) y usando la ecuación (2.3.7), se obtiene la expresión para la DPP:

$$p(m|d_o) \propto \exp(E(m)). \quad (2.3.10)$$

Donde

$$E(m) = -\frac{1}{2}[(d - T(m))^t C_D^{-1}(d - T(m)) + (m - m_p)^t C_m^{-1}(m - m_p)]. \quad (2.3.11)$$

Una vez que la DPP se ha identificado, la respuesta al problema inverso puede darse como aquel modelo que maximice la DPP. Este estimador se conoce como el

Máximo a Posteriori ó MAP. El problema es estimar la DPP y maximizarla en un gran espacio multidimensional de modelos. La forma más exacta es obtener el lado derecho de la ecuación anterior en cada punto en el espacio de modelos. Ésto es, evaluar el problema directo en cada uno de éstos puntos. Esta es una operación muy costosa en tiempo, a menos que la información a priori ayude a restringir el espacio de modelos a una pequeña región. Notar que aún con las suposiciones de las fdp Gaussianas para el error en los datos y la distribución a priori para el modelo, la fdp que resulta no es Gaussiana, debido a la presencia del término $T(m)$ en la función de verosimilitud. Una aproximación es usar una técnica de optimización para localizar el mínimo de la función de error (2.3.7), que corresponde al máximo de la DPP para una distribución a priori uniforme. Tales métodos se llaman de máxima verosimilitud. Si suponemos que la DPP puede ser aproximada por una Gaussiana cerca de su pico, también llamado el punto MAP, entonces el punto MAP también corresponderá con la media de la DPP Gaussiana. La matriz de covarianza posterior puede aproximarse de la curvatura del error en el punto MAP [40]:

$$\text{cov } m_{MAP} \approx \varepsilon_d^2 \left[\frac{1}{2} \partial^2 E / \partial m^2 \right]^{-1}.$$

Entonces se tiene una descripción completa de la DPP. En general, la DPP puede sin embargo, ser multimodal y entonces esta aproximación no resulta satisfactoria.

2.3.2 Consideraciones sobre la no-linealidad del operador

Diferentes formas de la DPP pueden obtenerse basándose en las suposiciones hechas en la forma de las fdp's a priori, la más común de las cuales es la Gaussiana. La ecuación (2.3.11) representa la DPP posterior en parámetros del modelo suponiendo

que las fdp's que describen la información a priori son Gaussianas. Varias soluciones se pueden obtener basándose en la no-linealidad del problema.

Caso lineal

Cuando el problema directo es lineal, se puede reemplazar el operador T por la matriz A , tal que

$$d = Am.$$

De las ecuaciones (2.3.10) y (2.3.11) se puede representar la $p(m|d_o)$ de la siguiente manera:

$$p(m|d_o) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(m - \hat{m})^t C_M^{-1} (m - \hat{m})\right] \quad (2.3.12)$$

Esto es, cuando el problema directo es lineal, la DPP en el espacio de modelos es Gaussiana con media

$$\hat{m} = [A^t C_D^{-1} A + C_m^{-1}]^{-1} [A^t C_D^{-1} d_o + C_m^{-1} m_p], \quad (2.3.13)$$

y matriz de covarianza

$$C_M^{-1} = A^t C_D^{-1} A + C_m^{-1}. \quad (2.3.14)$$

Cuando C_m^{-1} es cero, y C_D^{-1} es la matriz identidad, se recupera la fórmula de mínimos cuadrados estándar para los estimadores del modelo. Una C_m^{-1} no cero produce un resultado análogo con la solución mínimos cuadrados amortiguado. Las ecuaciones anteriores pueden escribirse también de la siguiente manera [39]:

$$\hat{m} = m_p + [A^t C_D^{-1} A + C_m^{-1}]^{-1} A^t C_D^{-1} (d_o - Am_p), \quad (2.3.15)$$

y

$$C_M = C_m - C_m A^t (A C_m A^t + C_D)^{-1} A C_m. \quad (2.3.16)$$

Con \hat{m} el centro de la Gaussiana, el valor medio de $p(m|d_0)$ y su punto de máxima verosimilitud.

No-linealidad débil

En el caso de no-linealidad débil, la función $T(m)$ se puede aproximar cerca de un modelo de referencia m_p , como

$$T(m) \approx T(m_p) + J_0(m - m_p) \quad (2.3.17)$$

donde $(J_0)_{i,j} = (\partial T_i / \partial m_j)_{m=m_p}$, para el i ésimo punto de datos y el j ésimo parámetro del modelo. Para este caso, la DPP es aproximadamente Gaussiana, con centro

$$\hat{m} = m_p + [J_0^t C_D^{-1} J_0 + C_m^{-1}]^{-1} J_0^t C_D^{-1} (d_o - T(m_p)), \quad (2.3.18)$$

y matriz de covarianza

$$C_M^{-1} = J_0^t C_D^{-1} J_0 + C_m^{-1}. \quad (2.3.19)$$

Caso quasi-lineal

En el caso quasi-lineal la linealización (2.3.18) no es aceptable en general, excepto dentro de una región del espacio $\mathcal{D} \times \mathcal{M}$ con DPP significativamente alta. La estrategia correcta entonces es obtener el máximo de $p(m|d_o)$, sea m_M , obtenida mediante un algoritmo iterativo, y usar una aproximación lineal cerca de m_M , para estimar la matriz de covarianza posterior. El punto m_M que maximiza la DPP en la ecuación

(2.3.10) minimiza las funciones de error dadas por (2.3.11). Varios métodos de descenso de gradiente se han usado para encontrar el mínimo de la función de error. Entre éstos, están el método de Newton, el método de descenso más rápido, método de Newton pre-condicionado, método de gradiente conjugado, variables métricas y método simplex.

El caso no-lineal

Cuando la relación entre los datos y el modelo es altamente no-lineal, la función de error resultante puede caracterizarse por tener varios mínimos. La ecuación DPP que resulta es multimodal. Para resolver el problema, una posibilidad es restringir la búsqueda al punto de máxima verosimilitud en el espacio de modelos, usando suposiciones particulares acerca de la forma de las fdp's que representan los datos experimentales y las suposiciones a priori sobre el modelo.

Otra opción es el uso de métodos de optimización globales, tales como recocido simulado y/o algoritmos genéticos, per se ó en combinación con muestreo Monte Carlo.

2.3.3 Modelos con discontinuidades

Una de las principales limitantes de los métodos de regularización anteriores es en el tipo de soluciones que producen. Los modelos que se obtienen son contínuos, y generalmente no se incluye el tratamiento de las discontinuidades en las soluciones. Excepto en los métodos de búsqueda global, como recocido simulado y algoritmos genéticos, en los cuales no es necesario imponer restricciones de suavidad.

Aproximación por Campos Aleatorios Markovianos

Una aproximación alterna para recuperar modelos discontinuos en el caso de restauración de imágenes fué propuesta por Geman [31], basándose en estimación Bayesiana y modelos de campos aleatorios Markovianos (CAM). En este esquema, como en el caso anterior, el conocimiento a priori se representa en términos de una distribución de probabilidad adecuada.

En su modelo, se construye un CAM consistente de dos procesos acoplados, uno actuando por los valores de intensidad (m), y el otro por las discontinuidades ó bordes de la imagen. El proceso de bordes ó líneas no es parte de los datos, ni es el objetivo de la estimación. Más bien, es un proceso auxiliar que se acopla con el proceso de intensidad de tal manera que las transiciones bruscas en el proceso de intensidad y las localizaciones de las discontinuidades en el proceso de bordes coincidan de manera satisfactoria. Sea $S^P = \{S_i, 1 \leq i \leq N\}$ el conjunto de sitios en la malla de intensidades ó del modelo y S^E la malla dual, cuyos sitios corresponden a todos los pares vecinos cercanos $\langle s, t \rangle$ de S^P . Los elementos de S^E se llaman "sitios de bordes" y corresponden al lugar de un borde entre los pixeles correspondientes.

El proceso de intensidad, puede ser denotado por $M = M_s^P, s \in S^P$ y el proceso de bordes por $L = L_r, r \in S^E$. En el modelo de Geman, se considera una imagen que adquiere valores discretos $M_s^P \in \Lambda$, en nuestro caso, los modelos están discretizados y adquieren valores en $[0, M_{max}]$, y el proceso de líneas es binario $L_r \in \{0, 1\}$, con $L_r = 1$ (0 respectivo) indicando la presencia (ausencia respectiva) de un borde en r .

Considerando al proceso $X = (M, L)$, con conjunto de sitios $S = S^P \cup S^E$, y espacio de configuraciones $\Omega = \Lambda^{S^P} \times \{0, 1\}^{S^E}$. El sistema de vecindades de cada pixel $s \in S^P$, \mathcal{G}_s consiste de los cuatro pixeles adyacentes y los cuatro sitios de bordes

asociados con s . La vecindad de cada sitio de la malla de bordes $s = \langle r, t \rangle \in S^E$ consiste de los dos pixeles r, t y los seis sitios de bordes "conectados" a s , como se observa en la figura 2.2. Los sitios en la frontera de S poseen menos vecinos.

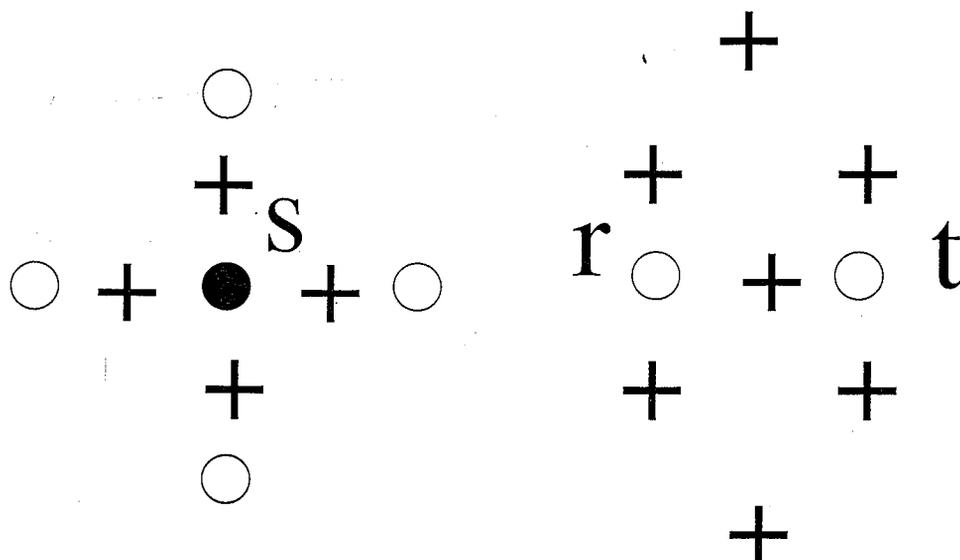


Figura 2.2: Sistema de vecindades del pixel s en la malla S^P (círculos), y del sitio $\langle r, t \rangle$ en la malla de bordes S^E ("+").

Una de las principales suposiciones en esta aproximación es que la distribución a priori de x es un CAM que posee una distribución de probabilidad de Gibbs, la cual puede expresarse como

$$p(x) = \frac{1}{Z} \exp\{-H(x)\}, \quad (2.3.20)$$

donde Z es una constante normalizadora, y la función de energía $H(x)$ es de la forma

$$H(x) = H^1(m, l) + H^2(l). \quad (2.3.21)$$

Dado el sistema de vecindades \mathcal{G}_s , un CAM es un proceso estocástico indexado por S^P , en el cual, para cada $(i, j) \in S^P$ y cada x ,

$$P(X_{i,j} = x_{i,j} | X_{k,l} = x_{k,l}, (k, l) \neq (i, j)) = \\ P(X_{i,j} = x_{i,j} | X_{k,l} = x_{k,l}, (k, l) \in \mathcal{G}_{i,j}).$$

Esta condición equivale a que H^1 y H^2 representen sumas de funciones de potencial dentro del modelo de energía (Teorema de Hammersley-Clifford) [32].

El algoritmo se construye para maximizar la distribución condicional de X , dados los datos d , esto es, encontrar la moda de la distribución posterior $P(X = x | D = d)$, ó el estimador MAP. El componente H^1 se construye tal que los estados de baja energía tienen valor $l_{(r,t)} = 1$ (0 respectivo) cuando la diferencia de intensidad $|m_r - m_t|$ es grande (pequeña respectiva). De hecho, se quiebra el enlace entre pixeles r, t cuando $l_{(r,t)} = 1$.

Una forma adecuada para H^1 es:

$$H^1(x) = \theta_1 \sum_{(r,t)} \phi(m_r - m_t)(1 - l_{(r,t)}), \quad (2.3.22)$$

donde

$$\phi(u) = u^2. \quad (2.3.23)$$

La organización de l se controla por

$$H^2(l) = -\theta_2 \sum_D W_D(l), \quad \theta_2 > 0 \quad (2.3.24)$$

donde la suma es sobre los cliques D en S^E de cuatro sitios de bordes vecinos. Dado un sistema de vecindades $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_s)$ un clique es un conjunto $C \subset S$ tal que si $s, t \in C, s \neq t$ implica que $s \in \mathcal{G}_t$. $W_D = \xi_i$ denota los pesos asociados a las configuraciones.

Los pesos ξ se asignan según el conocimiento a priori que se tenga sobre el problema a resolver.

La distribución conjunta de $X = (m, l)$ es, luego:

$$\Pi(x) = \Pi(m, l) = Z^{-1} \exp(-H(m, l)) \quad (2.3.25)$$

donde $Z = Z(\theta, \xi) = \sum_x e^{-H(x)}$, Geman [32] considera que la imagen sufre un proceso de degradación que se puede representar como:

$$d_s = \psi(\phi((\mathcal{K}m)_s), \eta_s), \quad (2.3.26)$$

donde \mathcal{K} es una representación discreta del operador K , la función punto dispersor del sensor:

$$(\mathcal{K}m)_s = \sum_{t \in S} \mathcal{K}(s, t) x_t. \quad (2.3.27)$$

En el proceso de formación de la imagen, consideran η como ruido blanco Gaussiano con media constante μ , varianza ε^2 , e independiente de X . Entonces,

$$\begin{aligned} P(D = d | X = x) &= P(\psi(\phi(Km), \eta) = d | M = m, L = l) \\ &= P(\psi(\phi(Km), \eta) = d), \end{aligned}$$

donde cada η_s es $N(\mu, \varepsilon^2)$. Para el operador \mathcal{K} , se supone invariante en el espacio y con soporte pequeño. Además, se supone que $\psi(a, b)$ posee una inversa suave $\Psi(u, v)$,

tal que el ruido se pueda representar como

$$\begin{aligned}\eta &= \Psi(d, \phi(Km)) \\ &= \{\Psi_s(d, \phi(Km)), s \in S^P\}.\end{aligned}$$

Cada Ψ_s depende solamente de d_s y m_t para t en una pequeña vecindad de s . Geman demuestra que en este proceso, considerando la información a priori y la estructura de vecindad anteriormente establecidas, la distribución posterior $\Pi(x|d) = P(X = x|D = d)$, corresponde a una distribución de Gibbs respecto del grafo (S, \mathcal{G}^P) , lo que significa que la imagen original se puede estimar maximizando la distribución posterior. El problema de maximizar la distribución posterior equivale entonces a minimizar la funcional:

$$H(x) + \frac{1}{2\varepsilon^2} \|\mu - \Psi(d, \phi(Km))\|^2, \quad (2.3.28)$$

la cual, debido al tamaño de las imágenes ordinarias, representa un problema formidable si se trata de resolver directamente. Geman [31] propone resolverlo mediante "relajamiento estocástico", usando recocido simulado y el hecho de que la distribución posterior es Gibbs, para implementar un algoritmo que converge a un mínimo global. El uso de recocido simulado implica grandes tiempos de ejecución, excepto si las iteraciones se realizan en paralelo.

Modas Condicionales Iteradas

Besag [45] propone un algoritmo para maximizar la DPP usando las características locales de la misma. El objetivo principal es reducir el tiempo de ejecución, aunque la convergencia es hacia un mínimo local. Considerando que el algoritmo se encuentra en una cierta localidad de la imagen, y que se han actualizado ya un cierto número

de elementos, denotados por \hat{x} , y el objetivo es actualizar el valor actual \hat{x}_i en el pixel i con toda la información disponible. Entonces Besag considera como una elección adecuada a la \hat{x}_i con máxima probabilidad condicional dados los datos d y la reconstrucción actual $\hat{x}_{S \setminus i}$, ésto es, los valores de los demás pixeles en la imagen. Suponiendo que las distribuciones condicionales son localmente dependientes, ésto es $P(x_i | x_{S \setminus i}) \equiv p_i(x_i | x_{\delta_i})$, donde p_i es específica al pixel i , y δ_i es la vecindad del pixel i , se aproxima la distribución posterior del elemento en el sitio i por

$$P(x_i | d, \hat{x}_{S \setminus i}) \propto l(d_i | x_i) p_i(x_i | \hat{x}_{\delta_i}), \quad (2.3.29)$$

Tal que la implementación es sencilla, para el caso de $p(x)$ localmente dependiente (estructura de CAM). Al aplicarse secuencialmente a cada elemento, el procedimiento define un ciclo de un algoritmo iterativo. Como valor inicial, se adopta el resultado de aplicar máxima verosimilitud convencional.

2.4 Generación de modelos continuos a trozos en problemas de inversión

A partir de aquí se presentan los algoritmos desarrollados en esta tesis para la generación de modelos continuos a trozos para problemas de inversión no-lineales. Se toman las ideas de procesado de bordes de Geman et. al., la aproximación de Besag, el concepto de proceso de líneas de Marroquín [24] y se incorporan en algoritmos de inversión no-lineales.

Los problemas de inversión Geofísica presentan varias complejidades adicionales respecto de restauración de imágenes:

- La funcional directa es generalmente no lineal.
- Los datos son mediciones realizadas en la superficie de la Tierra, y el modelo a recuperar no es accesible físicamente.
- La hipótesis Markoviana ya no es aceptable en las respuestas, debido a que el valor del campo en la superficie se ve afectado por una gran extensión del modelo. Sin embargo, se puede considerar en el modelo.

2.4.1 El algoritmo Global

Consideremos la formulación para un sistema de inversión que considera una distribución a priori Gaussiana y errores Gaussianos, como la establecida en la ecuación (2.3.11), sólo que ahora haremos $m_p = 0$, y usaremos, como es costumbre, la matriz de covarianza del modelo para establecer nuestra información a priori. La información a priori que generalmente se incluye considera elementos que conforman al penalizador Tikhonov de la primera derivada, por una matriz de suavidad, quedando el funcional como:

$$U = \|C_d d - C_d T(m)\|^2 + \lambda \|S m\|^2. \quad (2.4.1)$$

La matriz covarianza $C_m^{-1} = S^T S$ está formada por

$$C_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La aproximación que ha dado excelentes resultados consiste en reemplazar la funcional por los primeros términos de la serie de Taylor. En una pequeña vecindad de m , $T(m^k + \Delta) \propto T(m^k) + J^k \Delta$, donde J^k es la matriz jacobiana evaluada en el vector m . Aplicando la aproximación se obtiene el algoritmo que se muestra en la figura 2.3.

```

inicializa  $\bar{m}$ ;  $m = m_0$ 
repeat
obtiene  $T(m)$ ,  $J(m)$  y  $\hat{d} = d - T(m) + Jm$ 
 $m \leftarrow [\lambda S^t S + (C_d J)^t C_d J]^{-1} (C_d J)^t C_d \hat{d}$ 
until {  $RMS \leq$  deseado }

```

Figura 2.3: Algoritmo de regularización linealizando el funcional directo

El ajuste se define como $RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (d_i - T_i(m))^2 / \varepsilon_i^2}$, y se supone que $C_d = \text{diag}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N\}$.

En Occam, [43] se actualiza además el valor de λ en cada iteración, se obtiene resolviendo

$$U(m, \lambda) = \{\|C_d d - C_d T(m)\|^2 - X_*\} + \lambda \|Sm\|^2. \quad (2.4.2)$$

para el valor de λ tal que se intercepte la asíntota para el ajuste deseado X_* [44].

Su aplicación produce modelos continuos, como se observa en la figura 2.4, para los datos MT que se muestran en las figuras 2.5 y 2.6.

El proceso de bordes se puede incorporar en esta formulación, incluyendo las variables binarias l_i entre cada término del elemento penalizador de rugosidad, y agregando un penalizador para la aparición de las variables de línea, como sigue:

$$U_{LP} = \|C_d d - C_d T(m)\|^2 + \lambda (Sm)^t D (Sm) + \theta (M - \text{tr} D). \quad (2.4.3)$$

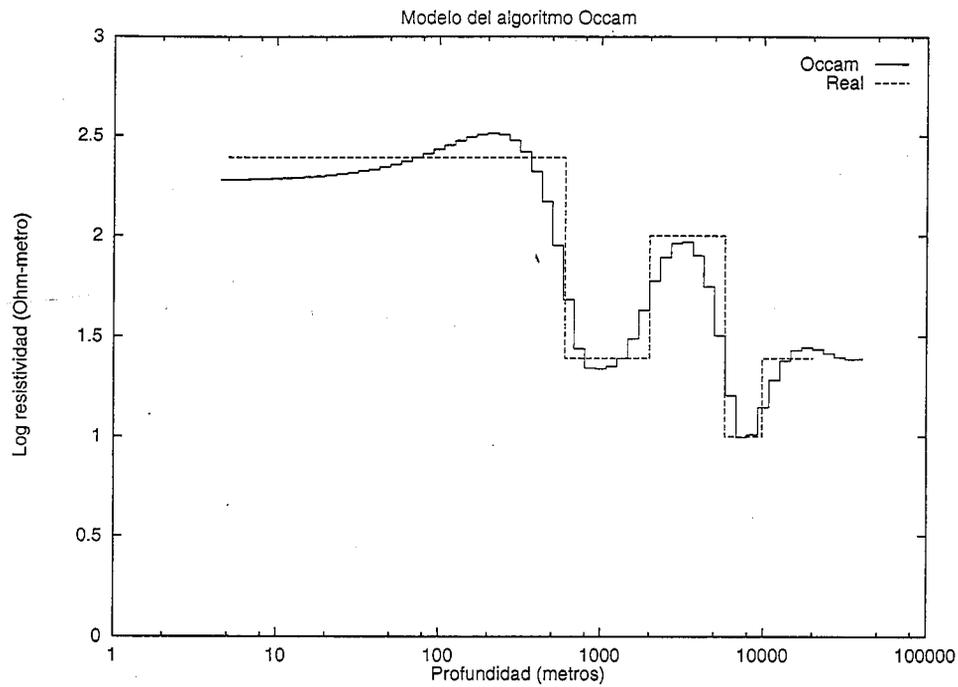


Figura 2.4: Modelo obtenido por el algoritmo Occam para el caso MT.

Donde $D = \text{diag}[0, l_2, l_3, \dots, l_M]$, M es el número de elementos en el modelo, y θ el parámetro para penalizar la activación de líneas.

Realizando minimización respecto de m , i.e. para D fija, y luego respecto de l produce el algoritmo Global LP, de la figura 2.7.

La minimización respecto de D se realiza después de haber llevado a cabo n_i iteraciones con la restricción de suavidad sin discontinuidades. Para ésto, se disminuye el umbral (θ) de la siguiente manera, considerando los términos que incorporan a l_i en el funcional U_{LP} :

$$(m_i - m_{i-1})^2 l_i + \theta(1 - l_i).$$

Cuando $(m_i - m_{i-1})^2 < \theta$ entonces $l_i = 1$, de otra manera $l_i = 0$. El umbral

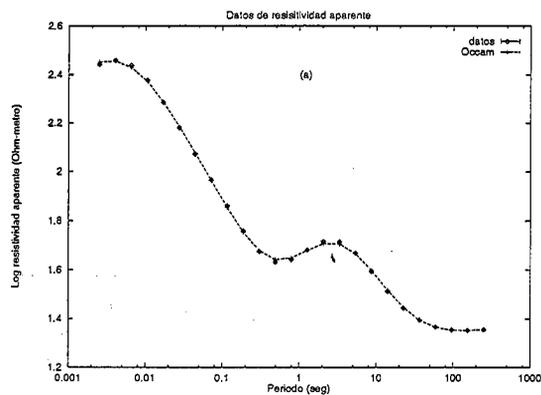


Figura 2.5: Datos de resistividad aparente para el modelo de la figura 2.4

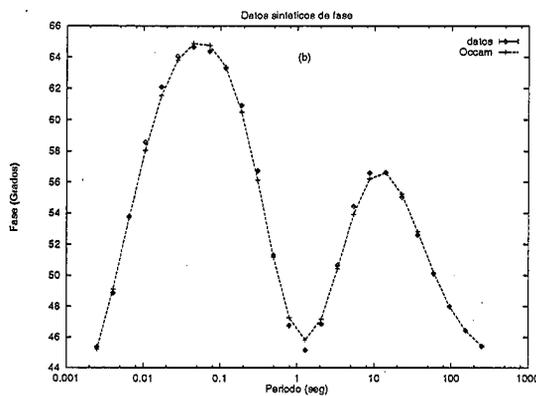


Figura 2.6: Datos de fase para el modelo de la figura 2.4

disminuye hasta que se detecta la primera discontinuidad, entonces permanece constante, mientras se realiza otra iteración. Entonces, θ disminuye de nuevo, y otra iteración se realiza. El ciclo continúa hasta que el ajuste RMS es menor ó igual que el valor deseado.

```

inicializa  $m$ ;  $m = m_0$ 
for  $n_i$  iteraciones
obtiene  $T(m)$ ,  $J(m)$  y  $\hat{d} = d - T(m) + Jm$ 
 $m \leftarrow [\lambda S^t DS + (C_d J)^t C_d J]^{-1} (C_d J)^t C_d \hat{d}$ 
endfor
repeat
obtiene  $T(m)$ ,  $J(m)$  y  $\hat{d} = d - T(m) + Jm$ 
 $m \leftarrow [\lambda S^t DS + (C_d J)^t C_d J]^{-1} (C_d J)^t C_d \hat{d}$ 
mantiene  $m$  fijo, y minimiza respecto de los elementos de  $D$ 
until  $RMS \leq$  deseado

```

Figura 2.7: Algoritmo Global LP.

Se puede observar que el término regularizador es ahora:

$$S^t DS = \begin{bmatrix} l_2 & -l_2 & & & 0 \\ -l_2 & (l_2 + l_3) & -l_3 & & \\ & -l_3 & (l_3 + l_4) & -l_4 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -l_M & l_M \end{bmatrix}.$$

Al principio, cuando todas las $l_i = 1$, el término de regularización se convierte en la funcional estabilizadora de Tikhonov.

Una ventaja de este método es que puede incluir penalizadores para otras condiciones, por ejemplo no permitiendo la activación de dos líneas consecutivas, lo que puede dar lugar a inestabilidad en la inversión de la matriz. El principal problema es que la inserción de discontinuidades deteriora la condición de la matriz A . En el límite, conforme más líneas se ven activadas, D se aproxima a cero, y el regularizador se desvanece gradualmente, conduciendo a un problema impropriamente planteado, pero esto se evita impidiendo que el término de umbral disminuya más allá de cierto valor. Un modelo producido por este método para los datos MT anteriores se observa en la figura 2.8. El modelo ajusta los datos con $RMS = 1$. Se observa cómo se

incluyen las discontinuidades en lugares cercanos donde el modelo real las presenta.

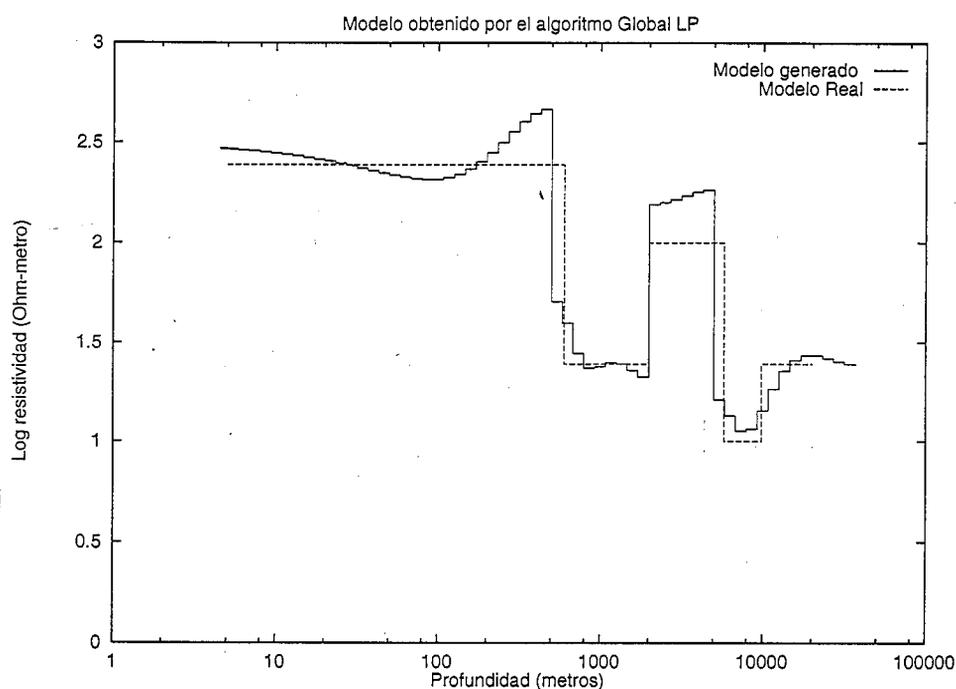


Figura 2.8: Modelo obtenido por el algoritmo Global LP

2.4.2 Algoritmos locales

En el algoritmo anterior se requiere en cada iteración invertir una matriz que eventualmente deja de ser positiva definida, la cual se va afectando en su condición. Una posible solución es emplear una técnica de relajamiento, que además de ayudar en la solución, permite observar directamente el efecto de los elementos de la malla dual en el algoritmo de inversión.

Algoritmo No-lineal.

En este algoritmo se realiza aproximación local en el modelo para producir relajamiento, reescribiendo la ecuación (2.4.3) elemento por elemento:

```

inicializa  $m, k$ ;  $m = 0, k = 0$ 
for {  $n_i$  iteraciones }
obtiene  $T(m), J(m)$  y  $\hat{d} = d - T(m) + Jm$ 
resuelve  $m_r^k$  en  $m_r^k(l_r + l_{r+1}) - g^k(m_r^k) - m_{r-1}^k l_r - m_{r+1}^{k-1} l_{r+1} = 0$ 
 $k++$ 
endfor
repeat
obtiene  $T(m), J(m)$  y  $\hat{d} = d - T(m) + Jm$ 
resuelve  $m_r^k$ ;  $m_r^k(l_r + l_{r+1}) - g^k(m_r^k) - m_{r-1}^k l_r - m_{r+1}^{k-1} l_{r+1} = 0$ 
mantiene  $m^k$  fijo, y minimiza respecto de los elementos de  $D$ 
 $k++$ 
until {  $RMS \leq$  deseado. }

```

Figura 2.9: Algoritmo local no lineal LP.

$$\begin{aligned}
 U_{LP} = & \sum_{i=1}^N \frac{(d_i - T_i(m))^2}{\varepsilon_i^2} + \lambda \sum_{j=2}^M (m_j - m_{j-1})^2 l_j \\
 & + \theta \sum_{j=2}^M (1 - l_j).
 \end{aligned}$$

Donde se supone que la matriz $C_d = \text{diag}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N]$. Para minimizar respecto del elemento m_r , se obtienen derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{LP}}{\partial m_r} = & - \sum \frac{(d_i - T_i(m))}{\varepsilon_i^2} \frac{\partial T_i}{\partial m_r} \\
 & + \lambda m_r (l_r + l_{r+1}) \\
 & - \lambda (m_{r-1} l_r + m_{r+1} l_{r+1}).
 \end{aligned}$$

El algoritmo se obtiene haciendo esta última ecuación igual a cero y resolviendo para m_r en términos de los valores actuales de m^k . El algoritmo del tipo Gauss-Seidel que resulta consiste en encontrar m^k como se muestra en en la figura 2.9, donde

$$g^k(m_r^k) = \frac{1}{\lambda} \sum \frac{(d_i - T_i(m^k))}{\varepsilon_i^2} \left(\frac{\partial T_i}{\partial m_r} \right)^k.$$

Las derivadas parciales se derivan de las ecuaciones analíticas para el problema, (1.2.11) para MT, y (1.3.17) para CD. Debido al carácter no-lineal de $g^k(m_r^k)$ se tiene que aplicar una técnica para encontrar el cero de la ecuación para cada elemento del modelo, un proceso lento. En la implementación que se realizó se empleó el algoritmo de Brent [46] para minimización unidimensional.

La minimización respecto de l también se realiza después de algunas iteraciones del algoritmo con el umbral alto, para permitir el desarrollo de un modelo inicial continuo. Luego, cuando la variación del modelo $\|m^k - m^{k-1}\|$ es pequeña, el umbral se disminuye hasta que una línea llegue a ser activada. Cuando esto ocurre, θ se mantiene constante, y se realizan varias iteraciones hasta que la variación del modelo vuelve a ser pequeña, procediendo a bajar el umbral de nuevo. El algoritmo termina cuando el ajuste RMS es menor ó igual a su valor deseado.

Se observa que se puede incluir la función de potencial para impedir que dos líneas consecutivas se enciendan [24], agregando a la función de energía el término:

$$-p \sum_{i=2}^M (2 - l_i - l_{i-1}),$$

con p una constante adecuada. Un modelo con ajuste $RMS = 1.0$ producido por este algoritmo se muestra en la figura 2.10, usando $\lambda = 250$. Este algoritmo puede usarse cuando el funcional no acepta una aproximación lineal, por ejemplo por serie de Taylor.

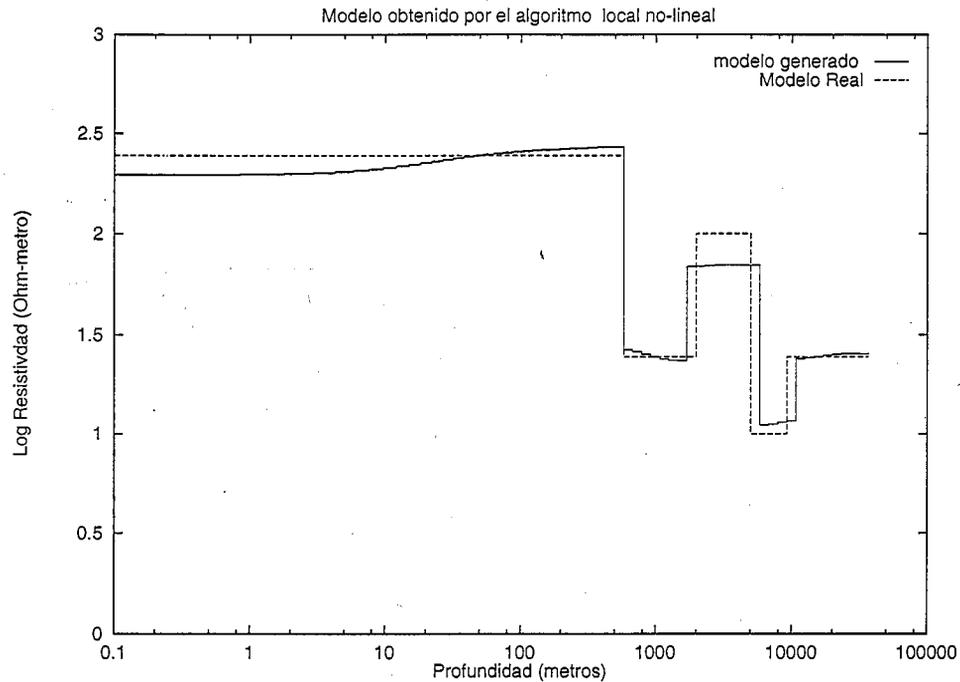


Figura 2.10: Modelo obtenido por el algoritmo local no lineal LP

Algoritmo local lineal

Considerando la aproximación lineal del funcional usada en el desarrollo del algoritmo de Occam, se puede obtener una versión lineal del algoritmo local. Reescribiendo la ecuación (2.4.3) en forma elemento por elemento, y tomando la derivada parcial respecto de m_r igual a cero, se obtiene un algoritmo similar al anterior, donde el elemento m_r^k se resuelve como sigue:

$$m_r^k = \frac{m_{r-1}^k l_r + m_{r+1}^{k-1} l_{r+1} + h^k(m)}{l_r + l_{r+1} + \frac{1}{\lambda} \sum_i \left(\frac{\partial T_i^k}{\partial m_r} \right)^2}, \quad (2.4.4)$$

donde

$$h^k(m) = \frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{(\hat{d}_i - s_1 - s_2)}{\varepsilon_i^2} \frac{\partial T_i}{\partial m_r},$$

$$s_1 = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\partial T_i}{\partial m_j} m_j^k,$$

y

$$s_2 = \sum_{j=r+1}^M \frac{\partial T_i}{\partial m_j} m_j^{k-1}.$$

En este algoritmo, cada paso es más rápido que en el caso anterior, porque $h^k(m)$ es una combinación lineal de los otros elementos del modelo, obtenidos tanto en el paso anterior como en el actual. La optimización sobre l_r se realiza como en el algoritmo anterior. La figura 2.11 muestra el modelo desarrollado por este algoritmo, con $\lambda = 250$, para los mismos datos MT.

Este algoritmo es más estable que la versión global, y es útil cuando el funcional puede ser aproximado por un modelo lineal, usando los primeros elementos de la serie de Taylor, como en los problemas MT y CD. Además ofrece la ventaja de la inserción de restricciones que permiten incluir información a priori.

En Occam, el parámetro λ se obtiene por una forma del principio de discrepancia [9]. Nosotros usamos un valor empírico corriendo varias pruebas, observando que a valores menores aumenta la convergencia, pero con inexactitudes en la localización de las discontinuidades. Por el otro lado, valores grandes de λ aumentan la exactitud del modelo, pero reducen la tasa de convergencia.

En pruebas realizadas con los datos mostrados en las figuras 2.5 y 2.6, para $\lambda = 250$, y terminando los algoritmos cuando $RMS = 1$, se obtuvieron los resultados

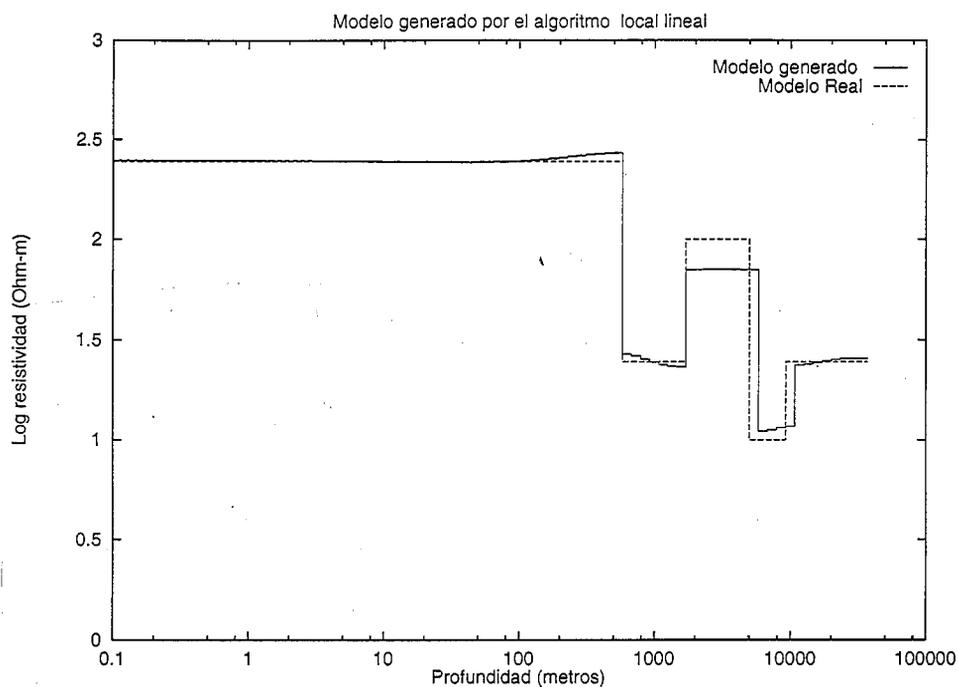


Figura 2.11: Modelo obtenido por el algoritmo local lineal LP

Algoritmo	No. Iteraciones	milisegundos/iteración
Global	6	471.7
Local No lineal	111	4020
Local lineal	321	37.4

Tabla 2.1: Iteraciones y tiempos de ejecución para los tres algoritmos, con $\lambda = 250$.

mostrados en la tabla (2.1), usando una computadora con procesador Pentium II a 300 Mhz. El modelo contiene 60 elementos en cada caso.

De la tabla se observa que el algoritmo Global requiere la menor cantidad de iteraciones, el algoritmo Local lineal requiere la mayor cantidad de iteraciones, aunque con el menor tiempo por iteración. Como es de esperar, el algoritmo Local no-lineal es el que ocupa la mayor cantidad de tiempo de procesamiento en cada iteración.

Tanto el algoritmo Global como el Local lineal son aplicables a problemas débilmente

no-lineales, debido a la suposición principal en cuanto a que el funcional se aproxima por los primeros elementos en la serie de Taylor. El algoritmo Local no-lineal es el más general, aunque requiere mayor tiempo de procesamiento.

Capítulo 3

Inversión de datos 1D con modelos contínuos a trozos

En este capítulo se presentan aplicaciones del algoritmo de inversión desarrollado en el presente trabajo. Se generan datos sintéticos y se comprueba que se recupera la estructura del modelo inicial. Luego se usan datos de campo que permiten comprobar su funcionamiento ante condiciones reales de errores en los datos.

3.1 Procesado de líneas discreto

De los algoritmos presentados en el capítulo anterior, el más rápido es Global LP, con seis a ocho iteraciones para llevar a cabo la convergencia. Sin embargo los modelos que se obtienen presentan curvatura en las áreas que se supone deben ser planas. Además, está el inconveniente del deterioro de la condición de la matriz que se debe invertir, como se notó en la sección correspondiente. El algoritmo más adecuado para nuestras aplicaciones resultó ser el local LP, debido a su rapidez de procesamiento

Profundidad (m)	Resistividad ($\Omega - m$)
600.0	250
1991.0	25.0
5786.1	100.0
9786.13	10.0
∞	25.0

Tabla 3.1: Modelo usado para generar datos

para cada iteración, y porque los modelos que se generan poseen secciones planas, de acuerdo con los modelos sintéticos. La implementación es a través de una malla principal para el modelo, y de una malla dual para las variables de línea.

3.1.1 Aplicación al método MT

En el método MT, los datos se incorporan de la siguiente manera: la resistividad aparente $d_i = \log \rho_a(m; \omega_i)$, para $i = 1, 3, \dots, N - 1$, y la fase $d_i = \phi_i(m; \omega_i)$, para $i = 2, 4, \dots, N$, en la frecuencia ω_i . N es el total de observaciones, el modelo se considera $\{m\}_j = \log \rho_j$. Se genera la malla principal considerando un sistema de capas con espesores constantes en escala logarítmica, para poder recuperar información en varias décadas de profundidad.

Usando el modelo que se observa en la Tabla (3.1), se generan los datos sintéticos que se muestran en las figuras 2.5 y 2.6, para 25 periodos en el intervalo $[.0025s, 250s]$. En este caso se supone un error de 1%.

Los resultados que se mostraron en el capítulo anterior, se obtienen para errores del 1% y $\lambda = 250$. En la figura 2.11 se observa cómo se recupera la estructura de capas original.

3.1.2 Mejoras al algoritmo

A los algoritmos propuestos se les puede incorporar un sobre-relajamiento, que corresponde a introducir en cada iteración una parte proporcional al elemento del modelo que se está evaluando mediante un parámetro de amortiguamiento α ;

$$m_r^{k+1} = \alpha \frac{h^k(m) + m_{r-1}^{k+1} l_r + m_{r+1}^k l_{r+1}}{l_r + l_{r+1} + \frac{1}{\lambda} \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial m_r} \right)^2 / \epsilon_i^2} + (1 - \alpha) m_r^k, \quad (3.1.1)$$

donde el valor más adecuado de α está relacionado con los eigenvalores del producto $A^0 A^1 \dots A^k$ [57], los cuales, si bien son difíciles de obtener, usando varias corridas de prueba se obtuvo un valor empírico adecuado de 1.4.

En la figura 3.1 se observa una comparación entre corridas del algoritmo con $\lambda = 250$, $\alpha = 1.0$, y los mismos datos pero ahora con $\alpha = 1.4$.

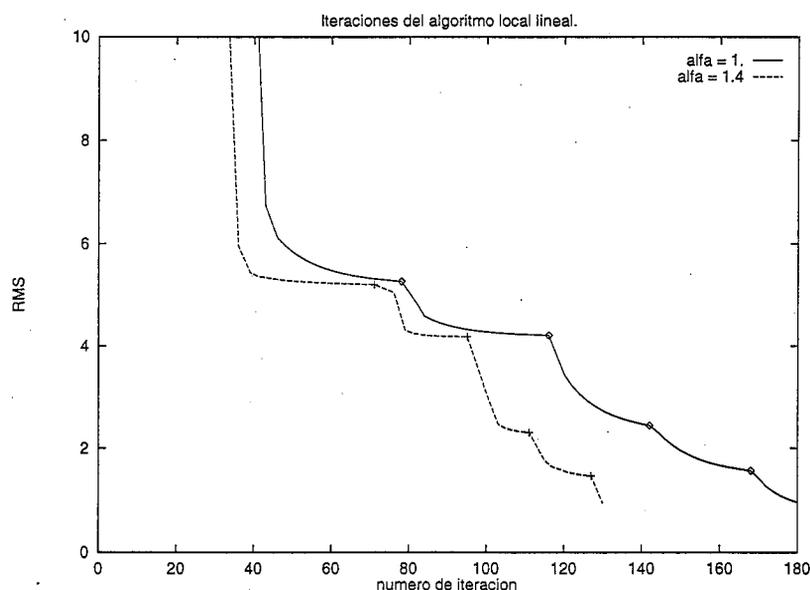


Figura 3.1: Comparación del error de ajuste contra el número de iteraciones para el algoritmo local LP, con $\lambda = 250$, $\alpha = 1$ en un caso y $\alpha = 1.4$ en el otro.

De la figura se observa un aumento en la velocidad de convergencia para el caso

$\alpha = 1.4$, y también se observa cómo mejora el ajuste al agregar una discontinuidad, en los sitios marcados por símbolos. El número de iteraciones es mayor que en el método Global, debido a que en lugar de realizar directamente la inversión matricial requerida en el método Global, se realiza un relajamiento tipo Gauss-Seidel que hace más larga la convergencia. No obstante, el tiempo necesario para cada iteración de éste algoritmo es menos de 10 veces menor que para una iteración en el algoritmo global.

Otra modificación al algoritmo local LP consiste en considerar el elemento penalizador de rugosidad:

$$\lambda \sum (m_j - m_{j-1}) l_j. \quad (3.1.2)$$

En este funcional no se establece una distinción de acuerdo a la profundidad del modelo. Todos los elementos poseen el mismo peso. Smith y Booker [54] proponen encontrar modelos con mínima estructura, minimizando

$$\int \left[\frac{dm}{df(z)} \right]^2 df(z), \quad (3.1.3)$$

como funcional penalizador de rugosidad, para un ajuste deseado. Su propuesta es en el sentido de que el método MT es menos sensible a elementos de altas profundidades del modelo. Lo que puede resultar en que sean más fácil de ajustar los datos en bajas frecuencias, ó el denominado ajuste "rojo", porque su elemento penalizador de rugosidad no sea lo suficientemente notable. Si se utiliza $f(z) = z$ se obtiene el penalizador original Tikhonov. Proponen usar $f(z) = \log(z + z_0)$ para obtener modelos con ajuste más blanco. En nuestro caso, la estructura de los espesores, (o la malla) hace el papel de la $f(z)$, controlando el color del ajuste. Este tipo de control se puede cambiar si consideramos una función de ajuste con la profundidad. En nuestro

caso lo implementamos mediante una λ que cambia con la profundidad. Por ejemplo se puede elegir que λ decremente su valor logarítmicamente con la profundidad.

En la figura 3.2 se observan los modelos obtenidos por el algoritmo lineal con $\lambda = 250$ y por el mismo algoritmo, con λ decreciente de 10,000 a 10, $\alpha = 1.0$ en ambos casos.

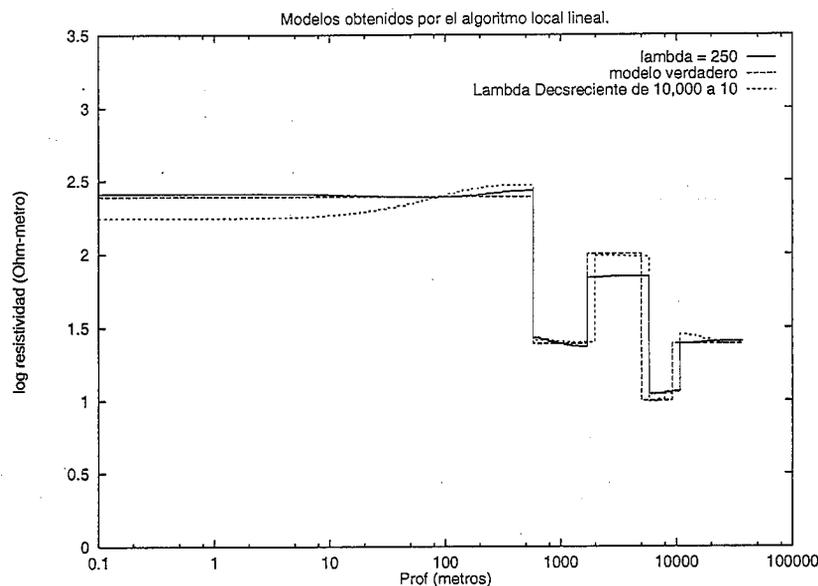


Figura 3.2: Modelos producidos por el algoritmo local lineal con $\lambda = 250$ en un caso y λ decreciente de 10,000 a 10 en el otro, para $\alpha = 1.0$, en ambos casos.

Se observa mejoría a grandes profundidades, a expensas de perder precisión en las capas someras.

La desventaja de esta modificación es que el tipo de función que se establezca para el penalizador de rugosidad afectará el desarrollo del modelo, pudiendo permitir que con menos discontinuidades de las que necesita el modelo se ajusten los datos. Se necesitan hacer varias pruebas con un conjunto de datos, para seleccionar al modelo más adecuado, de acuerdo a algún criterio particular, tal como el "color" del ajuste.

3.1.3 Aplicación a datos reales

La figura 3.3 presenta los resultados de aplicar el algoritmo local LP con $\lambda = 200$, y con λ decreciente de 500 a 10, $\alpha = 1.4$, para el conjunto de datos COPROD [59]. También se muestra el modelo que resulta de aplicar Occam. Los modelos se comparan contra el obtenido por Jones y Hutton [59] por prueba y error. Los cuatro modelos ajustan los datos con el mismo nivel $RMS = 1$.

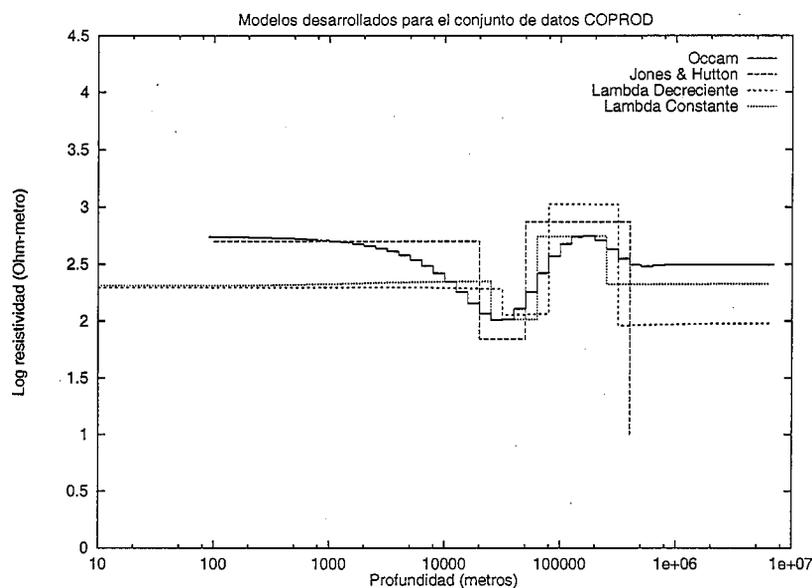


Figura 3.3: Modelos producidos por Occam, el algoritmo local lineal con $\lambda = 200$ en un caso y λ decreciente de 500 a 10 en el otro, para $\alpha = 1.4$, además se presenta el modelo de Jones y Hutton.

Se observa que los modelos obtenidos por el algoritmo local lineal no se pueden extraer directamente del obtenido por el algoritmo Occam, como se podría sospechar en principio.

También es de notarse cómo difieren los modelos a profundidades someras, esto se debe a que los datos no permiten definir suficientemente el comportamiento asintótico para bajos períodos, y también a que los datos de períodos cortos tienen errores

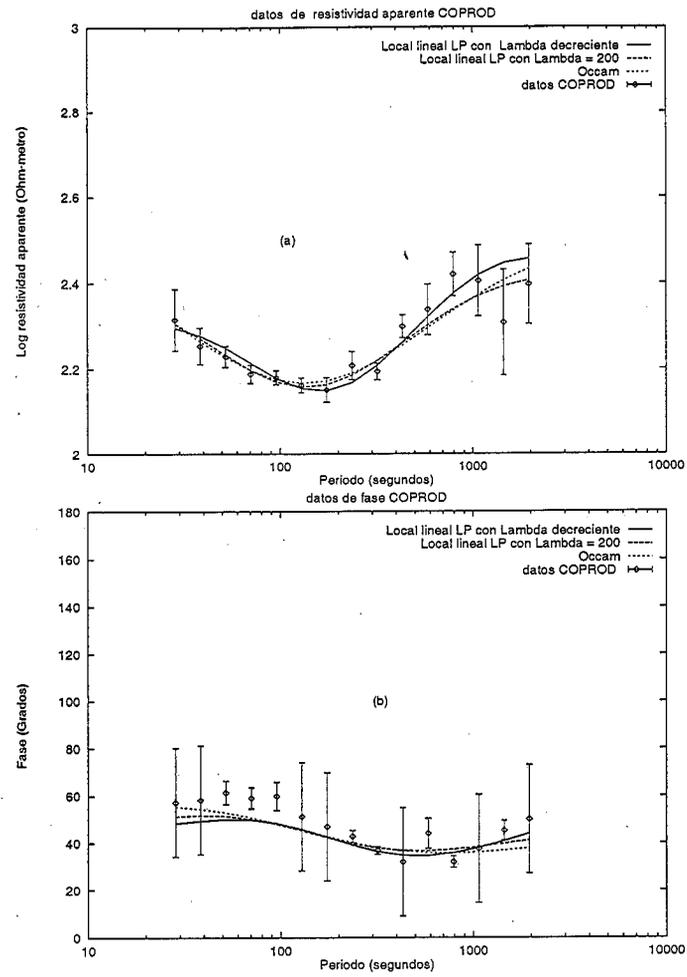


Figura 3.4: Ajuste a los datos de resistividad aparente (a) y fase (b) de COPROD.

relativamente grandes. Los datos y las respuestas se observan en la figura 3.4.

3.1.4 Aplicación al método CD

Para probar el funcionamiento del algoritmo local lineal LP en el método CD, se generaron datos sintéticos, basándonos en el modelo que se muestra en la figura 3.5, donde también se observa el modelo desarrollado por el algoritmo local lineal, usando $\lambda = 250$. En una segunda aplicación del algoritmo, se utilizaron los datos que se observan en la figura 3.6, en este caso los datos incluyen ruido Gaussiano del 1%. El algoritmo termina cuando el ajuste $RMS = 1$.

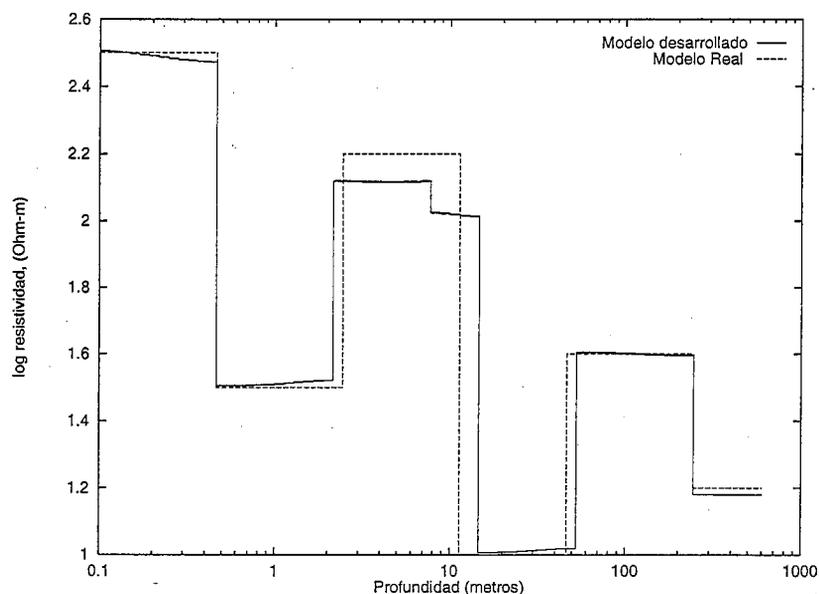


Figura 3.5: Modelo sintético usado para obtener datos de prueba vs. modelo obtenido por el algoritmo local lineal.

Se observa cómo se recupera la estructura original del modelo sintético. Existe un error en la discontinuidad a 10m, que produce que se genere otra discontinuidad, que no existe en el modelo original, pero solo afecta en una pequeña variación en la resistividad de la tercera capa.

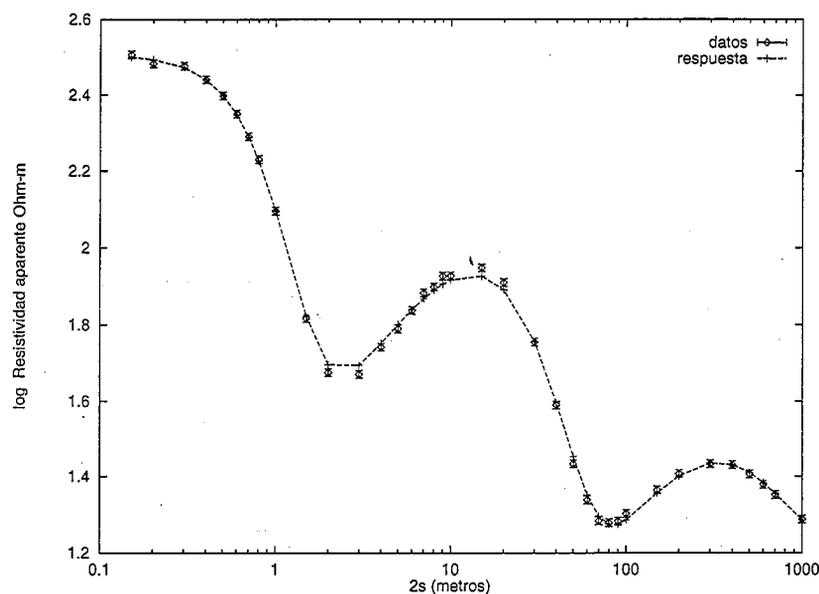


Figura 3.6: Datos sintéticos con ruido Gaussiano de 1% y ajuste obtenido por el algoritmo local lineal.

3.1.5 Corrección de estática

Como se observó en el capítulo 2, el problema del desplazamiento estático en CD consiste de un corrimiento vertical en algunas secciones de la curva logarítmica de la resistividad aparente. Estos desplazamientos se deben a la presencia de anomalías someras en pequeña escala, cerca del sitio de medición [20], y conducen a grandes errores en los modelos invertidos. La corrección de estos desplazamientos y la interpretación se realizan normalmente por separado. En nuestro caso, el proceso de corrección puede ser incluido durante la inversión, considerando que uno de los segmentos, (usualmente el último) puede ser usado como referencia. También esta referencia puede ser obtenida por otros medios, como una medición independiente ó de información de pozos. En la figura 3.7 se observan los datos sintéticos utilizados en el modelado anterior, modificados incluyendo tres factores de desplazamiento para

simular el efecto de estática. Además se incluyen valores de $L/2$ en los que existe traslape entre secciones, con el fin de simular lecturas repetidas, a diferentes espaciamentos de electrodos de potencial. Se supone que la sección correspondiente a valores grandes de $L/2$ no se ve afectada por ningún factor.

La inclusión de los términos de desplazamiento en el funcional de minimización produce una modificación al mismo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (d_i - (T_i(m) - \delta_{ij}))^2 / \varepsilon_i^2 \\
 & + \lambda \sum_{j=2}^M (m_j - m_{j-1})^2 l_j \\
 & + \lambda^F \sum_j (\delta_{ij} - \hat{\delta}_{ij})^2 \\
 & + \theta \sum_{j=2}^M (1 - l_j + \phi(n(l_j^V))). \tag{3.1.4}
 \end{aligned}$$

El término δ_{ij} representa el desplazamiento del dato i , que pertenece a la sección S_j . Una estimación del mismo, $\hat{\delta}_{ij}$, se obtiene de los puntos donde se tomaron las lecturas repetidas

$$\hat{\delta}_{ij} = \frac{1}{N_c} \sum_{i \in S_j \cap S_{j+1}} (d_{i,j} - d_{i,j+1}),$$

donde N_c es el número de puntos en el traslape entre las secciones S_j y S_{j+1} , y $d_{i,j}$ es el dato correspondiente al período i , que está en la sección S_j .

El término de desplazamiento puede ser obtenido por minimización de la ecuación (3.1.4) respecto de δ_{ij} , para esto se obtiene la derivada parcial de U respecto de δ_{qr} , la cual, al igualar a cero resulta en

$$\delta_{qr} = \frac{\frac{1}{N_c} \sum_{i \in S_r} (d_i - T_i) / \varepsilon_i^2 + \lambda^F \hat{\delta}_{qr}}{\frac{1}{N_c} \sum_{i \in S_r} \frac{1}{\varepsilon_i^2} + \lambda^F}. \tag{3.1.5}$$

La minimización respecto de los elementos del modelo se realiza usando el valor estimado de δ_{ij} , y su derivada correspondiente

$$\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial m_s} = -\frac{\frac{1}{N_c} \sum_{i \in S_r} \frac{\partial T_i}{\partial m_s} / \epsilon_i^2}{\frac{1}{N_c} \sum_{i \in S_r} \frac{1}{\epsilon_i^2} + \lambda^F}$$

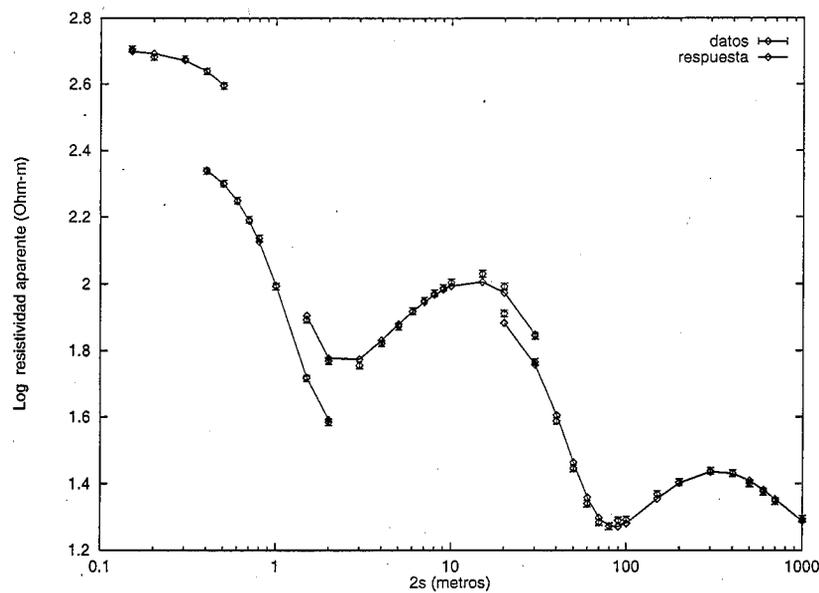


Figura 3.7: Datos sintéticos con ruido Gaussiano de 1% y ajuste obtenido por el algoritmo local lineal, incluyendo los factores de desplazamiento.

Se utilizaron los datos sintéticos con factores de 0.02, -0.1 y 0.06 que se muestran en la figura 3.7.

El modelo sintético y el desarrollado se observan en la figura 3.8, donde se puede constatar que se recupera la estructura, sin verse afectado por los factores de desplazamiento. Los factores obtenidos fueron 0.18, -0.11 y 0.059.

Con el fin de observar qué pasa cuando no se corrigen los factores de desplazamiento, se aplicó inversión a los datos anteriores, pero sin realizar la corrección respectiva, el modelo resultante se muestra en la figura 3.9.

Se pueden notar grandes errores en la estructura obtenida al realizar la inversión

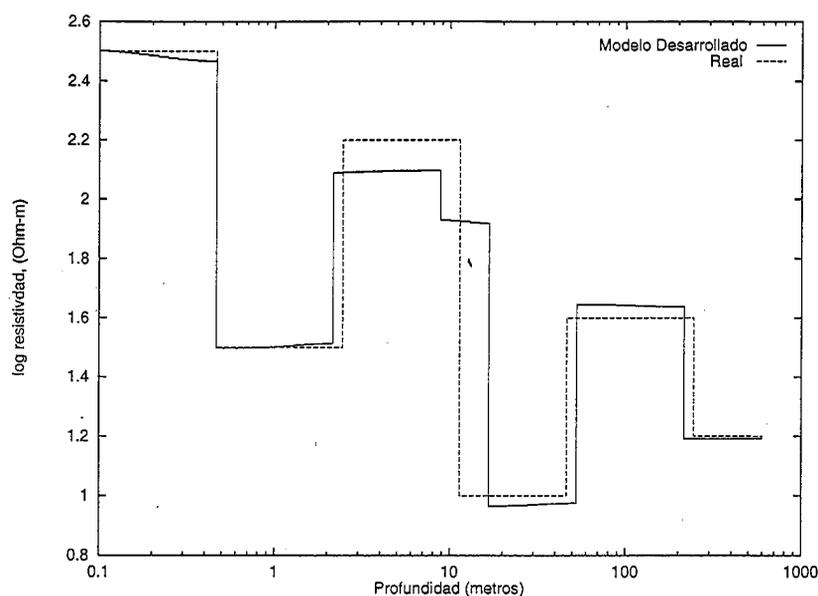


Figura 3.8: Modelo sintético contra el modelo obtenido cuando los datos están afectados por desplazamientos de estática y éstos son estimados mediante el algoritmo de inversión.

sin corrección, el algoritmo debe ser detenido para evitar que falle la convergencia, esto se realizó cuando el ajuste fué de 5.82.

Es obvio que el ruido debe afectar la recuperación de los factores, con el fin de observar esto, se agregó ruido Gaussiano de 5% a los datos sintéticos, como se muestra en la figura 3.10.

En los datos se observa que la información que da lugar a la última discontinuidad en el modelo se ha perdido entre el ruido, lo que produce que el modelo obtenido por el algoritmo no pueda detectar esta discontinuidad, como se ve en la figura 3.11.

3.2 Procesado de líneas contínuo

Como se observó en el capítulo sobre regularización, Charbonnier et al. [30] obtuvieron un algoritmo que introduce variables de proceso de líneas contínuas (CLP). Se

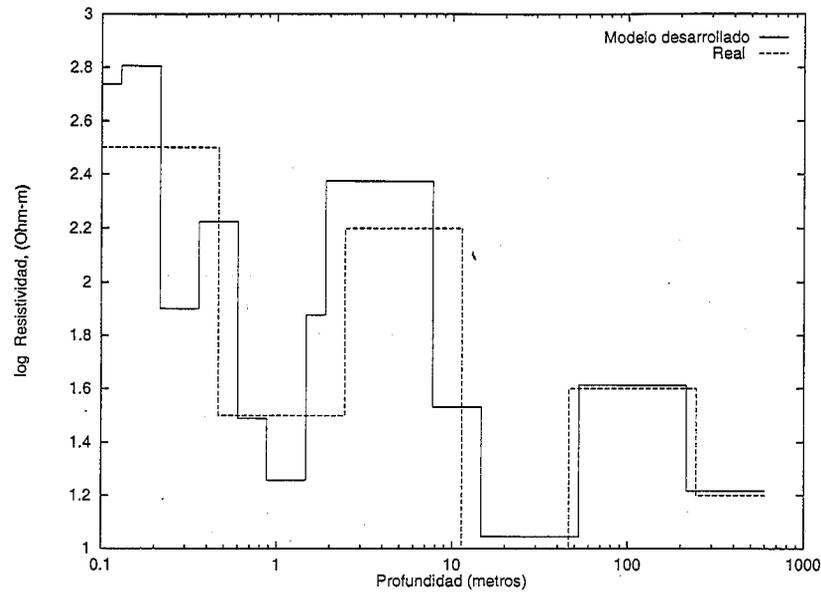


Figura 3.9: Modelo sintético contra el modelo obtenido cuando los datos están afectados por desplazamientos de estática y no se estiman los desplazamientos.

propone minimizar una funcional de energía aumentada, que en nuestros términos se puede formular como

$$U^* = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N_\nu} (d_i - T_i(m))^2 / \varepsilon_i^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=2}^M \{b_j(m_j - m_{j-1})^2 + \Psi(b_j)\},$$

donde Ψ es una función convexa de la variable de proceso de líneas, $\Psi(b) = \theta[(\theta')^{-1}(b)] - b(\theta')^{-1}(b)$, y $\theta = \psi(\sqrt{t})$. ψ representa una función potencial para el término de regularización, que se puede ver como una generalización de $\sum (m_j - m_{j-1})^2 l_j$ a la forma $\sum \psi(m_j - m_{j-1})$. Se han propuesto varias funciones potencial en la literatura [30], entre ellas la propuesta por Geman y McClure, [33] $\psi_{GM}(t) = t^2/(1+t^2)$, dió buenos resultados para el problema de reconstrucción de imágenes SPECT [33]. El procedimiento de minimización respecto de m se realiza como en los

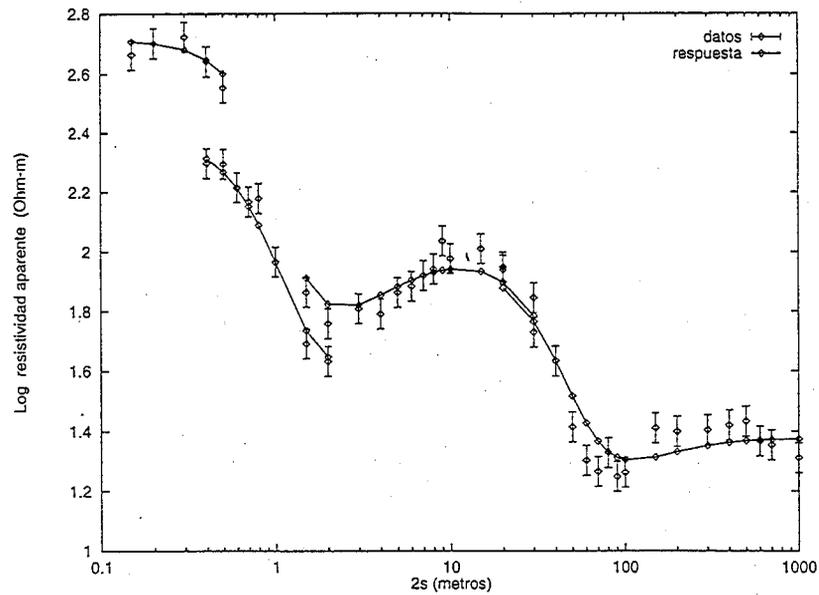


Figura 3.10: Datos sintéticos con ruido Gaussiano de 5% incluyendo los factores de desplazamiento, contra el ajuste obtenido por el modelo de el algoritmo local lineal.

algoritmos anteriores. Charbonnier et al. [30] probaron que el mínimo de U^* respecto a b está dado en:

$$b_r = \frac{\psi'(m_r - m_{r-1})}{2(m_r - m_{r-1})}.$$

La aplicación del algoritmo al método MT es de manera directa. Como b tiene la misma estructura que m , ahora no se aplica el concepto de la malla dual para las variables de línea.

La figura 3.12 muestra un modelo obtenido por el algoritmo para los datos sintéticos MT de la sección 3.1.1 usando ψ_{GM} , considerando errores de 1%, con $\lambda = 250$ contra el modelo obtenido por el algoritmo local LP, también con $\lambda = 250$.

Los modelos son muy parecidos, aunque se observa que el algoritmo CLP muestra menos exactitud a grandes profundidades.

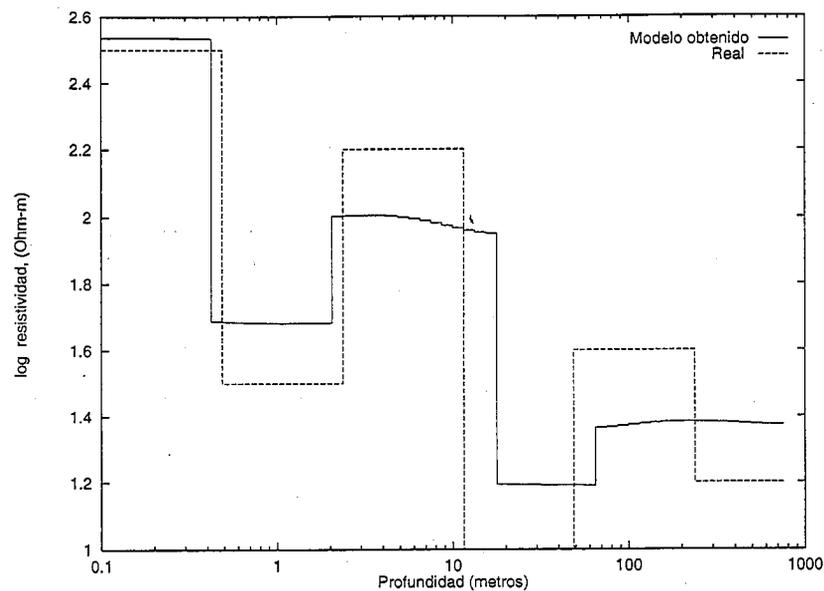


Figura 3.11: Modelo sintético contra el modelo obtenido cuando los datos están afectados por desplazamientos de-estática y ruido Gaussiano de 5%.

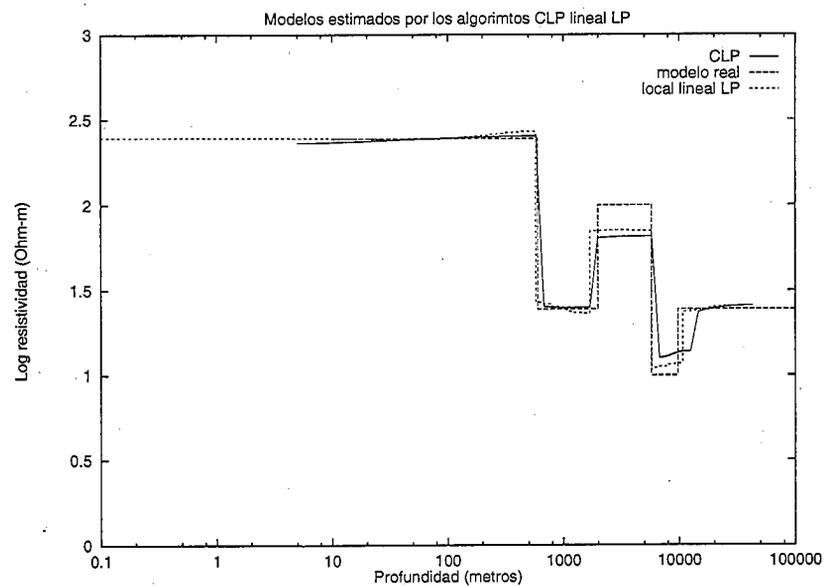


Figura 3.12: Modelo real contra los modelos obtenidos por los algoritmos CLP y local lineal, para los datos sintéticos MT de las figuras 2.5 y 2.6.

Capítulo 4

Modelos acoplados para la inversión de datos 2D

4.1 Introducción

En el caso de que se tengan sondeos en varios sitios a lo largo de un transecto, lo que es bastante usual, y suponiendo además que se trata de un ambiente del tipo cuenca sedimentaria, es muy común el realizar una compilación de secciones, la que puede ser obtenida mediante inversión 1D de varios sitios [34]. Si el modelo de arranque para un procedimiento de inversión 2D es más cercano al real que uno seleccionado al azar, entonces se requerirán menos iteraciones para llegar al mínimo en el procedimiento de inversión. Aunque las inversiones 1D se realizan de manera independiente, se han hecho intentos por correlacionar los modelos 1D. Por ejemplo, Parr y Hutton [35] realizaron un modelado pseudo 2D incorporando restricciones en las ecuaciones de regresión. Pero antes, tienen que usar un programa de modelado interactivo para desarrollar los modelos 1D individuales. Aquí se propone la interconexión de varios modelos 1D, permitiendo la inserción de restricciones entre los sitios vecinos, durante

el proceso de inversión en sí, en lugar de después de que cada modelo se ha desarrollado. El acoplamiento entre modelos se realiza mediante la malla dual, sobreimpuesta en los modelos de regularización, suponiendo que cada modelo posee la misma malla de regularización. Este criterio de suavidad horizontal puede ser interrumpido por la activación de variables de proceso de línea horizontales. Se presentan resultados para los problemas MT y CD.

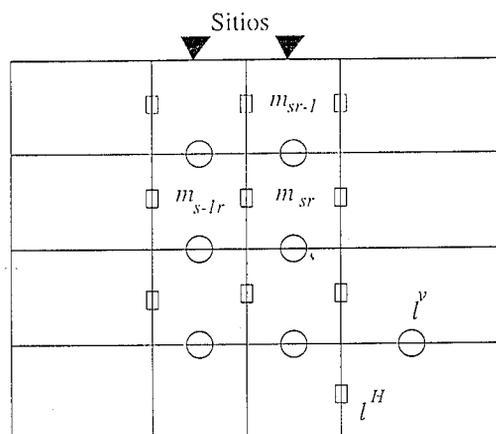
4.2 Modelos acoplados

Consideremos un modelo 1D para cada sitio de un transecto, y cada sitio con la misma malla de regularización, el acoplamiento entre vecinos puede realizarse mediante la inserción de una malla dual, sobre-impuesta con la de regularización, como se ve en la figura 4.1.

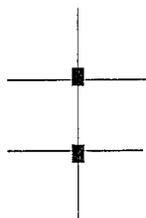
Para un sitio ν la funcional de regularización correspondiente puede establecerse como:

$$U_\nu = \frac{1}{2N_\nu} \sum_{i=1}^{N_\nu} (d_i - T_i(m_\nu))^2 / \varepsilon_i^2 + \frac{\lambda_\nu^V}{2} \sum_{j=2}^M (m_{\nu j} - m_{\nu j-1})^2 l_{\nu j}^V + \frac{\lambda_\nu^H}{2} \sum_{j=2}^M (m_{\nu j} - m_{\nu-1 j})^2 l_{\nu j}^H + \theta_\nu^H \sum_{\nu=2}^M (1 - l_{\nu j}^H) + \theta_\nu^V \sum_{j=2}^M (1 - l_{\nu j}^V + \phi(n(l_{\nu j}^V))), \quad (4.2.1)$$

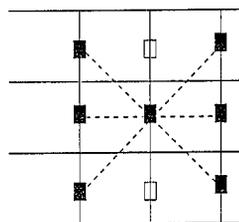
donde los datos corresponden al sondeo en el sitio ν . En esta ecuación se ha incluido un penalizador de rugosidad horizontal, a través del elemento multiplicado por λ_ν^H , el cual fuerza la aparición de modelos similares, pero también se incluye la capacidad de quebrar la continuidad horizontal con la inserción de las variables binarias l^H . $\phi(n(l_{\nu j}^V))$ es una función de los elementos en la vecindad de $l_{\nu j}^V$, en la



(a)



(b)



(c)

Figura 4.1: (a) La malla dual, los círculos representan conexiones entre modelos mediante la variable binaria l^H , los cuadros representan enlaces verticales, usando la variable binaria l^V . (b) líneas verticales, y (c) conexiones laterales. Los símbolos vacíos denotan que las variables de enlace no están activadas.

malla dual, representada por $n(l_{\nu j}^V)$. La minimización respecto de m_{sr} , *i.e.*; $\nu = s$, $j = r$, considerando una aproximación de primer orden para la funcional directa, lleva al algoritmo para modelos acoplados similar al caso lineal LP, pero ahora la ecuación de actualización del elemento m_{sr} (ver ecuación 2.4.4) en la k ésima iteración es:

$$m_{sr}^k = A/B, \quad (4.2.2)$$

donde

$$A = (m_{sr-1}^k l_{sr}^V + m_{sr+1}^{k-1} l_{sr+1}^V) \lambda_s^V + m_{s+1r}^{k-1} l_{s+1r}^H \lambda_{s+1}^H + m_{s-1r}^k l_{sr}^H \lambda_s^H \\ + \frac{1}{N_s} \sum_i \left(\hat{d}_{si} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\partial T_{si}}{\partial m_{sj}} m_{sj}^k - \sum_{j=r+1}^M \frac{\partial T_{si}}{\partial m_{sj}} m_{sj}^{k-1} \right) \frac{1}{\varepsilon_i^2} \frac{\partial T_{si}}{\partial m_{sr}},$$

$$B = (l_{sr}^V + l_{sr+1}^V) \lambda_s^V + l_{sr}^H \lambda_s^H + l_{s+1r}^H \lambda_{s+1}^H + \frac{1}{N_s} \sum_i \left(\frac{\partial T_{si}}{\partial m_{sr}} \right)^2 / \varepsilon_i^2,$$

y

$$\hat{d}_{si} = d_{si} - T_{si}(m_s^{k-1}) + \sum_j \frac{\partial T_{si}}{\partial m_{sj}^{k-1}}.$$

La minimización respecto de l_{vj}^V y l_{vj}^H se realiza después de que todos los elementos de m_v^k ya han sido obtenidos para un ciclo. De manera similar al caso 1D, primero se realizan algunas iteraciones con el umbral en un valor alto, para permitir la generación de un modelo inicial continuo. Luego, cuando la variación del modelo $\|m^k - m^{k-1}\|$ es pequeña, el umbral se decreta hasta que se llegue a activar alguna línea. Para esto se incluyen funciones que favorecen la aparición de ciertos patrones; se alientan las discontinuidades verticales, en contraste con las horizontales, reforzando la hipótesis de un ambiente de cuenca sedimentaria.

Considerando el caso de l_{sr}^V , una iteración de la malla dual se puede implementar como sigue; el término $(m_{sr} - m_{sr-1})^2$ se compara con el umbral $\theta_s^V(1 + \phi(n(l_{sr}^V)))$ donde $\phi(n(l_{sr}^V)) = (v + v_1)$, $v = (2a) - a(l_{sr-1}^V + l_{sr+1}^V)$ penaliza la generación de líneas gruesas horizontales, ó discontinuidades contiguas. En la malla dual, esto corresponde a los cliques observados en la Figura 4.1(b). El término $v_1 = 2(b+c) - b(l_{s+1r}^V + l_{s-1r}^V) - c(l_{s+1r-1}^V \wedge l_{s-1r+1}^V + (l_{s+1r+1}^V \wedge l_{s-1r-1}^V))$, (donde \wedge es el "y" lógico), promueve que una

discontinuidad horizontal cerca de un modelo se propague al vecino. Esta situación corresponde al clique de la Figura 4.1(c). Para este propósito, se deben seleccionar adecuadamente los parámetros a , b , y c , en las implementaciones del algoritmo, los parámetros se seleccionaron mediante prueba y error, en base a observaciones en el comportamiento del algoritmo ante datos sintéticos. Para el caso de las variables binarias horizontales, la minimización se realiza como en el caso 1D original.

4.2.1 Aplicación al método MT

Para estructuras MT bi-dimensionales, los ejes del sensor se rotan de tal modo que x sea paralelo al rumbo y y es perpendicular a éste. Entonces $Z_{xy} = Z_{TE}$, es la impedancia transversal eléctrica (TE), y $Z_{yx} = -Z_{TM}$, la impedancia transversal magnética (TM). La impedancia “efectiva” $Z_{eff} = \sqrt{Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}Z_{yx}}$ se usa frecuentemente para generar modelos 1D para cada sitio [34]. De acuerdo a los datos que se utilicen, se pueden llegar a obtener modelos distintos.

La figura 4.2 presenta un modelo usado para generar datos sintéticos a periodos entre $[0.0025, 250]$ s. La coordenada y de los sitios es -10, -8, -6, -2, 0, 2, 6, 8 y 10 km. El modelo incluye una pequeña anomalía somera que se usará posteriormente para generar curvas con desplazamiento de tipo estático. El programa de modelado 2D que se utiliza fué desarrollado por Poll y Weaver [60]. Este programa incorpora características como la generación automática de la malla de solución de las ecuaciones de campo, de acuerdo a las conductividades de cada elemento del modelo, permitiendo una aproximación excelente a los campos eléctrico y magnético.

El modelo que se observa en la figura 4.3 fué obtenido usando el procedimiento mencionado para datos Z_{eff} con error de 1%. Se usaron datos obtenidos cuando el

modelo no incluye la anomalía somera. El modelo se obtuvo después de que cada sub-modelo 1D ajustó con un $rms = 1.1$. Los parámetros λ^V y λ^H usados fueron 100 y 200, respectivamente, para cada modelo. La malla utilizada en los algoritmos se expande exponencialmente con la profundidad, y no está relacionada con la malla generada por el programa de modelado directo de Poll y Weaver. Se observa que el modelo ha sido recuperado.

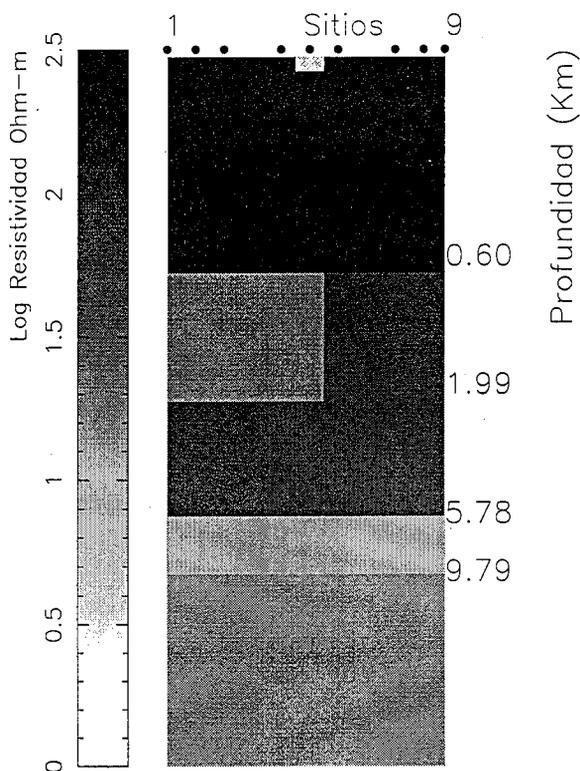


Figura 4.2: Modelo usado para generar datos sintéticos MT. La distancia entre los sitios 1 y 2 es de 2 km.

Con el fin de comparar el funcionamiento del algoritmo con el de uno realmente bidimensional, se aplicaron los datos sintéticos modo TE al programa Occam2.0, la versión 2D del algoritmo Occam [58]. El modelo desarrollado por Occam2.0 se muestra en la figura 4.4. La estructura real se ha borroneado debido al criterio de

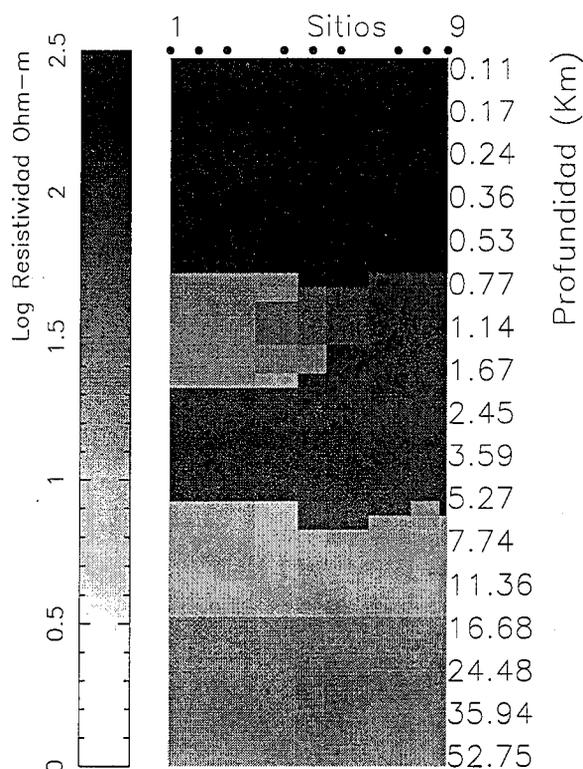


Figura 4.3: Modelo obtenido mediante el algoritmo de inversión que considera modelos acoplados. Los datos sintéticos Z_{eff} se obtuvieron a partir del modelo de la figura 4.2

suavidad continua en regularización. El ajuste RMS es 1.0 para este caso.

Corrección del desplazamiento estático para MT

El problema del desplazamiento estático en MT consiste de un corrimiento vertical en las curvas logarítmicas de resistividad aparente. Este desplazamiento se debe a la presencia de anomalías a pequeña escala, cerca de la superficie bajo el sitio de medición, y conduce a errores graves en los modelos obtenidos. Varias técnicas se han desarrollado para tratar este problema [61], entre las más utilizadas se encuentra el

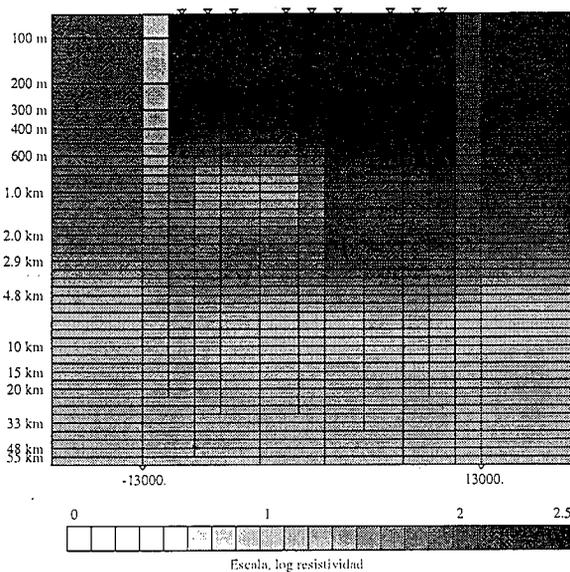


Figura 4.4: Modelo obtenido de datos sintéticos TE por el algoritmo Occam2.0

uso de mediciones independientes. La corrección de los desplazamientos y la interpretación de los sondeos son procedimientos que usualmente se realizan por separado. Para esto, deGroot-Hedlin [62] propuso realizar los dos métodos en un paso, usando inversión bi-dimensional. En el caso de un conjunto de modelos 1D acoplados, un procedimiento de corrección de los desplazamientos puede realizarse de manera conjunta con el proceso de inversión, considerando que uno de los sondeos puede ser la referencia, obtenida por algún procedimiento independiente [61], ó de información de pozos. La funcional de minimización permanece como anteriormente para el sitio de referencia, pero es modificada para los otros sitios, incluyendo un nuevo término;

$$\begin{aligned}
U_\nu &= \frac{1}{2N_\nu} \sum_{i=1}^{N_\nu} (d_i - (T_i(m_\nu) - \delta_\nu))^2 / \varepsilon_i^2 \\
&+ \lambda_\nu^V \sum_{j=2}^M (m_{\nu j} - m_{\nu j-1})^2 l_{\nu j}^V \\
&+ \lambda_\nu^H \sum_j (m_{\nu j} - m_{\nu-1j})^2 l_{\nu j}^H \\
&+ \theta_\nu^H \sum_{\nu=2}^M (1 - l_{\nu j}^H) \\
&+ \theta_\nu^V \sum_{j=2}^M (1 - l_{\nu j}^V + \phi(n(l_{\nu j}^V))).
\end{aligned}$$

La δ_ν afecta sólo a los valores de resistividad aparente. Conforme los modelos evolucionan, el penalizador de rugosidad horizontal alienta la aparición de modelos similares a la referencia. Este término de desplazamiento puede obtenerse minimizando respecto de δ_ν , para ésto obtenemos derivadas parciales respecto de δ_ν

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial \delta_\nu} = - \sum (d_i - (f_i - \delta_\nu)) / \varepsilon_i^2. \quad (4.2.3)$$

El minimizador se estima entonces por $\hat{\delta}_\nu = \frac{\sum (d_i - f_i) / \varepsilon_i^2}{\sum 1 / \varepsilon_i^2}$. La minimización correspondiente para los elementos del modelo se realiza usando el valor estimado de δ_ν , y la derivada correspondiente $\frac{\partial \hat{\delta}_\nu}{\partial m_{sr}} = - \frac{\sum \frac{\partial f_i}{\partial m_{sr}}}{\sum 1 / \varepsilon_i^2}$. El efecto del corrimiento estático se observa en la figura 4.5. Los modelos bajo la discontinuidad somera fueron difíciles de resolver, hubo que disminuir drásticamente λ^V y λ^H para lograr el ajuste deseado de 1.1.

En la figura 4.6 se presenta el modelo estimado para los mismos datos, pero ahora corrigiendo la estática. Se utilizó como referencia al sondeo 1.

En la figura 4.7 se observa el modelo estimado para los datos de Z_{eff} , corrigiendo la estática. También se utilizó al sondeo 1 como referencia.

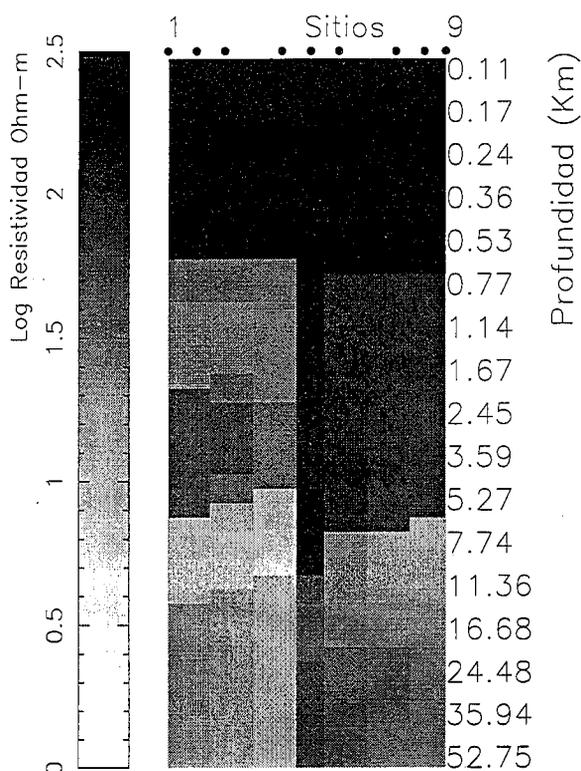


Figura 4.5: Modelo desarrollado a partir de datos sintéticos TM , sin incluir en el algoritmo de inversión la corrección por corrimiento estático.

En la figura 4.8 se observa el modelo estimado para los datos de Z_{eff} , por el algoritmo CLP, adaptado para modelos acoplados. Los datos no poseen desplazamientos por estática.

Aplicación a datos reales MT

Para observar la aplicación del algoritmo a datos reales, se adquirieron los sondeos correspondientes al conjunto denominado COPROD2 compilados por Jones [65]. Los datos corresponden a 23 sitios localizados sobre la anomalía de las planicies de Norte-Centro América (NACP). Varios métodos han sido aplicados a estos datos, produciendo modelos muy diferentes. Se consideró trabajar con el subconjunto usado por

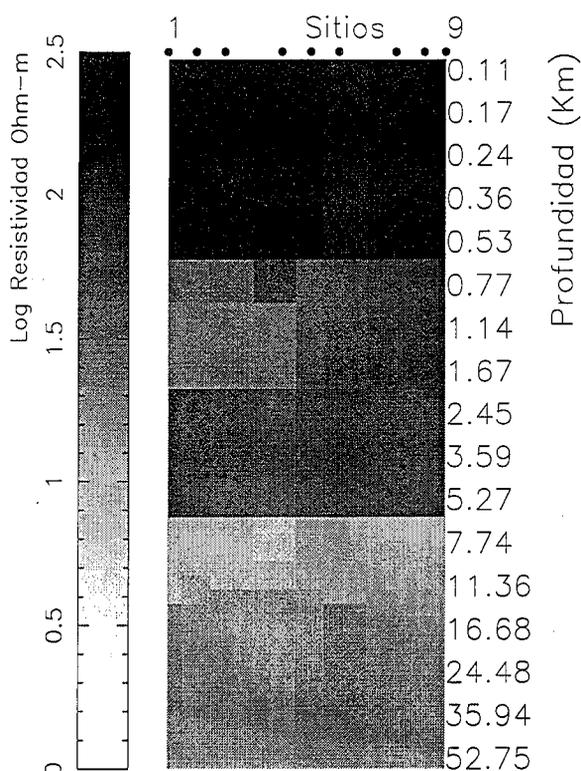


Figura 4.6: Modelo obtenido de los datos sintéticos TM , corrigiendo el desplazamiento estático.

DeGroot-Hedlin y Constable [63]; las estaciones PCS009 a PC5007, a periodos: 14, 28, 57, 114, 228, 455 y 910 s. En la figura 4.9 se observa el modelo desarrollado para este conjunto de datos, por los modelos acoplados, para un ajuste RMS total de 2.9.

La inversión se realizó con Z_{TE} , usando el conjunto de datos con corrección de estática realizada por Jones [64]. Se observa la presencia de la anomalía conductora NACP bajo los sitios 13-15.

La figura 4.10 presenta los modelos obtenidos usando Z_{TE} con los datos originales sin corregir la estática. Se utilizaron como referencias los sitios 1, 9, 13 y 16, para esto se utilizaron los datos corregidos por Jones.

El modelo también presenta la anomalía, y se observa en las mismas profundidades

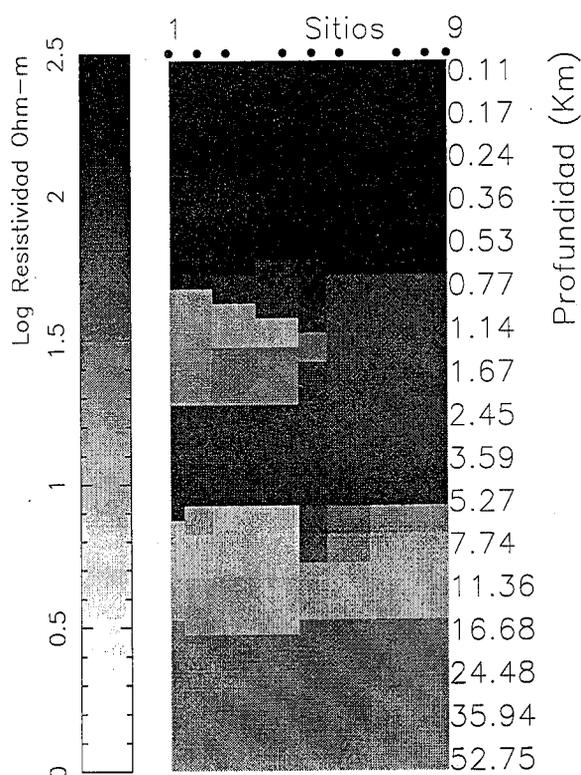


Figura 4.7: Modelo obtenido a partir de los datos sintéticos Z_{eff} , corrigiendo el desplazamiento estático.

reportadas por Agarwal et al [34], y DeGroot y Constable [63]

Las figuras 4.11 y 4.12 presentan los modelos obtenidos por el algoritmo CLP acoplado, para los dos casos; los datos corregidos y los datos sin corregir, usando los sitios 1,9,13 y 16 como referencias.

4.2.2 Aplicación al método CD

El esquema de modelos 1D acoplados se aplicó al problema de inversión de sondeos CD. Como se observó para el caso 1D, el problema de los desplazamientos estáticos es diferente al caso MT, en CD consiste de desplazamientos en diferentes secciones de cada curva logarítmica de la resistividad aparente. Las ecuaciones del problema

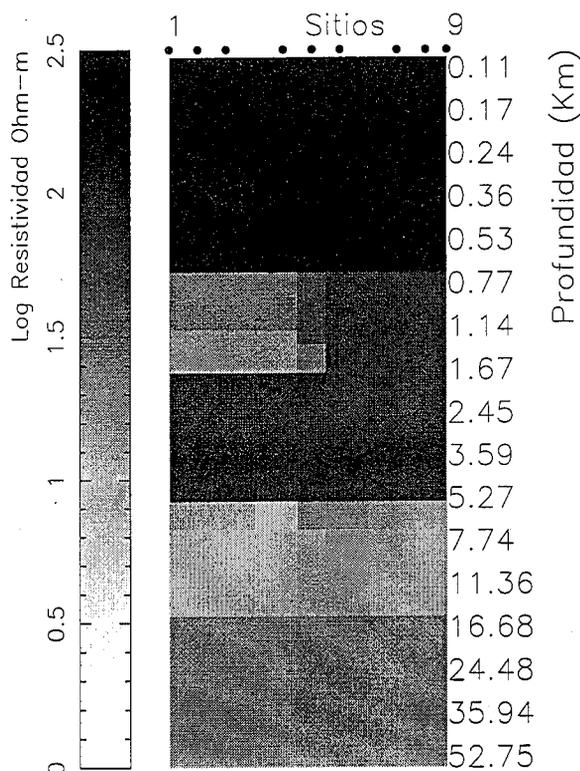


Figura 4.8: Modelos desarrollados de los datos sintéticos Z_{eff} por el algoritmo CLP acoplado. En este caso el modelo sintético es el mostrado en la figura 4.2 sin la anomalía somera.

son similares a las presentadas en la introducción, solo que en este caso se considera el término de desplazamiento por estática, en la manera descrita en el capítulo sobre inversión 1D CD. Se generaron datos sintéticos 2D para tres sitios, considerando el perfil que se muestra en la figura 4.13. Los datos se obtuvieron utilizando una versión del programa de Dey y Morrison [66] modificada para la configuración de electrodos Schlumberger. En el modelo se incluyen pequeñas anomalías someras para producir desplazamientos en las curvas de resistividad aparente. El conjunto de modelos que resultan usando el esquema acoplado se observa en la Figura (4.14). Los parámetros usados fueron $\lambda^V = 5000$, $\lambda^H = 5000$ y $\lambda^F = 2000$, para cada modelo, excepto el

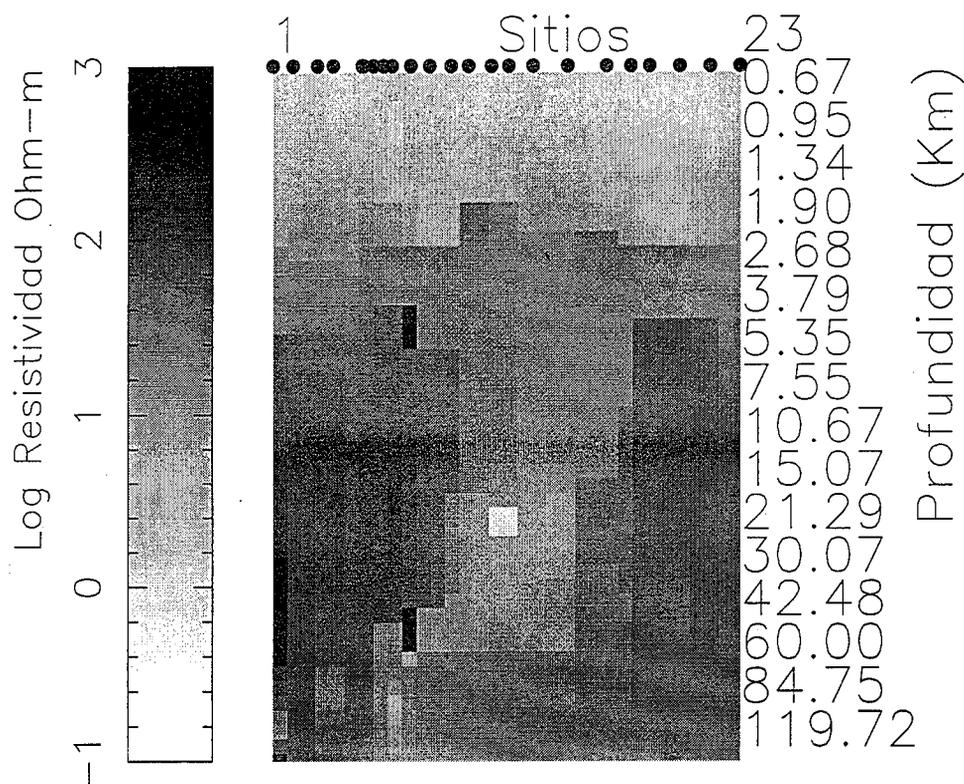


Figura 4.9: Modelo obtenido a partir de los datos COPROD2, usando Z_{TE} para los datos corregidos por Jones. La distancia entre los sitios 1 y 2 es de 1.4 km

sondeo 1, con $\lambda^H = 0$, ya que no posee vecino horizontal, con el cual comparar su modelo.

En el modelo final no aparecen las anomalías someras, en este caso se consideraron seis secciones diferentes en cada sondeo, como se observa en la figura 4.14 para los datos del sitio 1, en la cual se presenta también la respuesta del modelo 1D. Se consideraron incertidumbres de 1% en los datos, el ajuste final fué de $rms = 5.5, 3.4$ y 2.9 para los sitios 1, 2y3 respectivamente.

En la figura 4.16 se muestra otro modelo usado para generar datos sintéticos, y en la figura 4.17 se presenta el modelo obtenido a partir de esos datos. Se usaron los siguientes parámetros: $\lambda^V = 500, \lambda^H = 200$ y $\lambda^F = 200$ para cada modelo. Se incluyeron

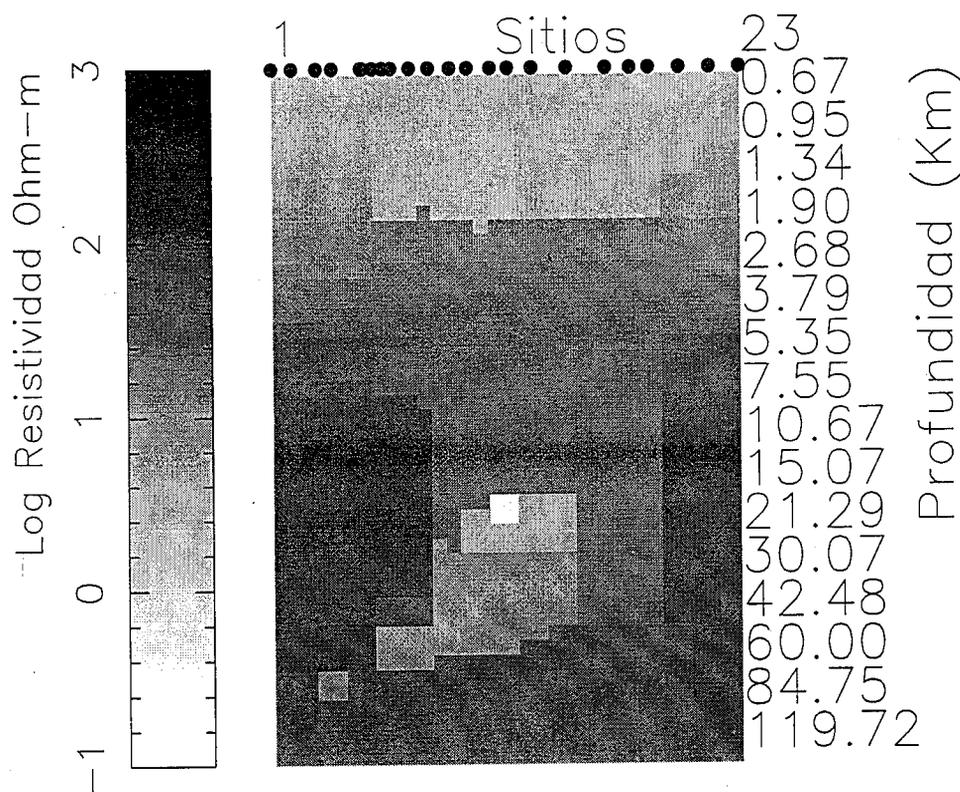


Figura 4.10: Modelo desarrollado a partir de los datos COPROD2, usando Z_{TE} . En el proceso de estimación se incluyeron los desplazamientos estáticos.

incertidumbres de 1% en los datos, los cuales son ajustados por cada modelo con los valores siguientes de RMS: 1.98, 2 y 1.97 para los sitios 1, 2 y 3 respectivamente. Ahora se consideraron 5 secciones diferentes en cada sondeo, y se mantuvo constante el factor δ correspondiente a la última sección de los sondeos 2 y 3 para considerar la hipótesis de que el basamento es el mismo para los tres sondeos. El ajuste a los datos para el sitio 1 se observa en la figura 4.18.

Aplicación a datos reales CD

Se aplicó el algoritmo de modelos acoplados a datos correspondientes a sondeos Schlumberger realizados en 1978 por la Comisión Federal de Electricidad en el campo

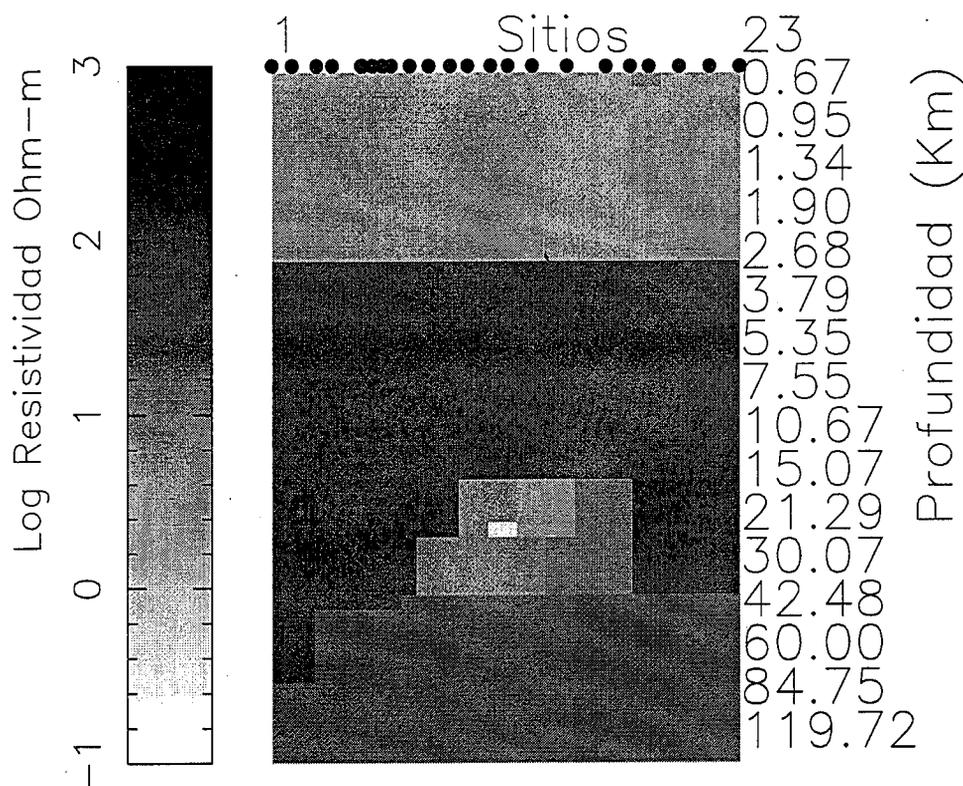


Figura 4.11: Modelo desarrollado de los datos COPROD2, usando Z_{TE} por el algoritmo CLP acoplado, con los datos corregidos por Jones.

geotérmico de Cerro Prieto, cerca de Mexicali, B.C., [67]. Los datos que se consideraron fueron para los sitios 122, 120, 125, 26, 126, 25, 24, 5, 118, 119, 14, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 16, 17 y 18 de la línea 1.

El modelo que se obtuvo se muestra en la Figura 4.19. En él se nota una gran discontinuidad vertical bajo el sitio 118. Esta discontinuidad corresponde a la formación "Horst Cerro Prieto". Mucha de la estructura ha sido observada por Wildt et al. [68].

Wildt obtuvo su modelo a prueba y error, usando un programa de modelado 2D, y considerando además el conocimiento geológico del lugar. En la figura 4.20 se observa una representación del modelo de Wildt, y en la figura 4.21 se muestra la parte inferior

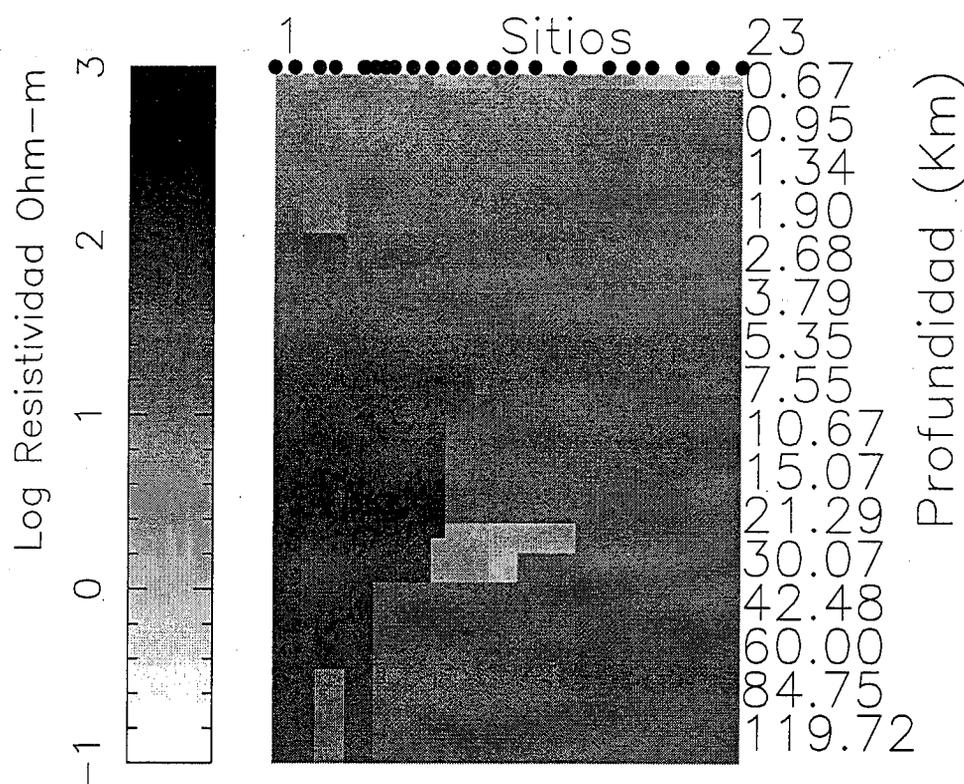


Figura 4.12: Modelo desarrollado de los datos COPROD2, usando Z_{TE} , por el algoritmo CLP acoplado, corrigiendo el desplazamiento por estática.

del modelo de la figura 4.19.

Se consideró un error de 1% en los datos, con $\lambda^V = 25$, $\lambda^H = 50$, $\lambda^F = 50$, para todos los modelos, excepto el primero, con $\lambda^V = 50$, $\lambda^H = 0$, $\lambda^F = 50$.

El ajuste a los datos para el sitio 122 se observa en la Figura 4.22, notando la corrección de los desplazamientos por estática. el ajuste para el sitio 17 se observa en la Figura 4.23.

En general, los datos de campo llegan a ser difíciles de ajustar en algunos sitios, principalmente por errores sistemáticos en la toma de la lectura, ó por efectos de anomalías bidimensionales, que pueden no ser reproducibles por modelos 1D, como los que se han empleado. No obstante, los datos discrepantes son fáciles de reconocer,

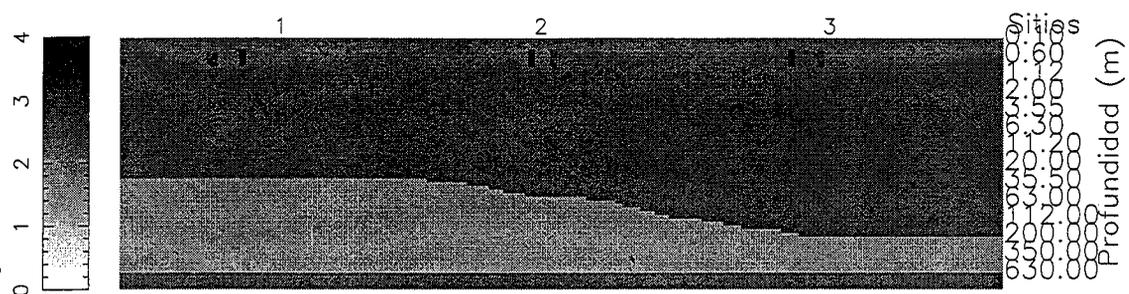


Figura 4.13: Modelo sintético usado para generar curvas de resistividad aparente 1D CD para los sitios mostrados. Los sitios se encuentran localizados en -2000 , 0 y $2000m$. La escala para la resistividad es logarítmica en $\Omega - m$. El modelo no se encuentra a escala horizontal, para mostrar los pequeños bloques conductivos que se usaron para producir desplazamientos por estática.

debido a que sobresalen al tratar de ajustarlos por un modelo 1D.

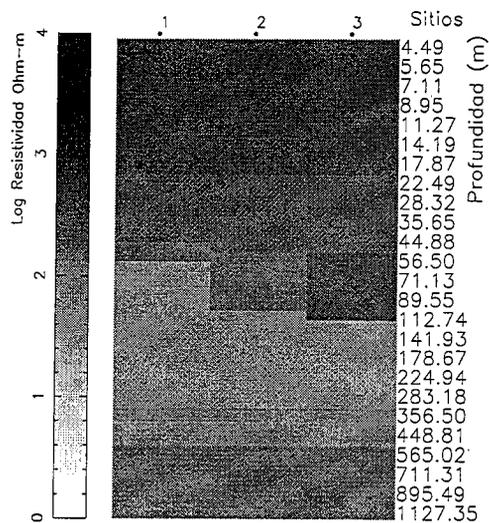


Figura 4.14: Modelos desarrollados a partir de los datos generados con el modelo sintético de la Figura 4.13.

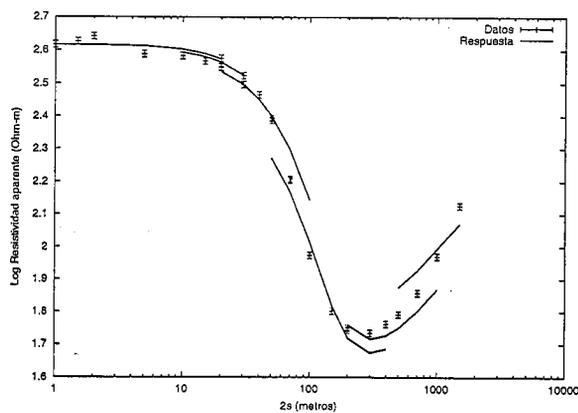


Figura 4.15: Datos y respuesta correspondiente 1D para el sondeo sintético en el sitio 1 del modelo de la figura 4.13.

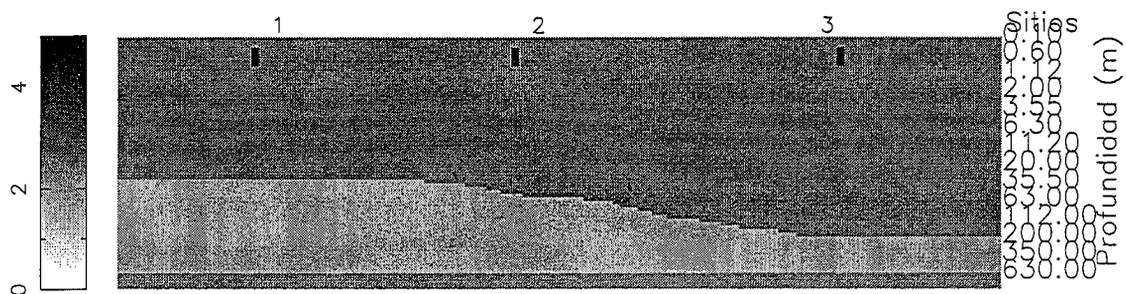


Figura 4.16: Modelo sintético usado para generar curvas de resistividad aparente 1D CD para los sitios mostrados. Los sitios se encuentran localizados en -2000 , 0 y $2000m$. La escala para la resistividad es logarítmica en $\Omega - m$. El modelo no se encuentra a escala horizontal, para mostrar los pequeños bloques conductivos que se usaron para producir desplazamientos por estática.

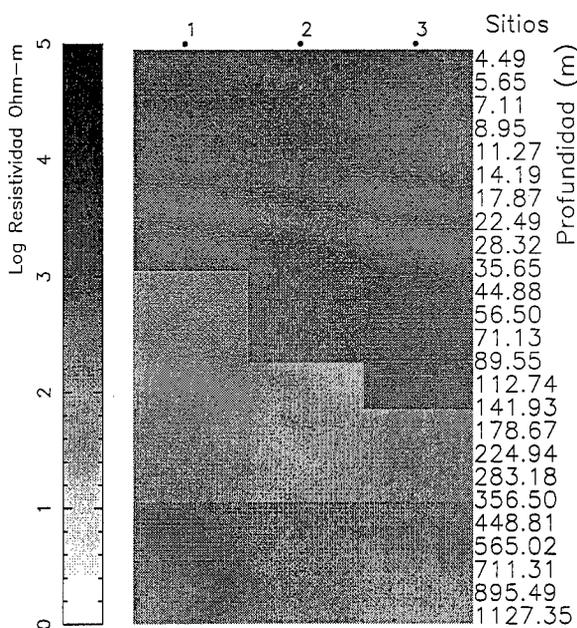


Figura 4.17: Modelos desarrollados a partir de los datos generados con el modelo sintético de la figura 4.16.

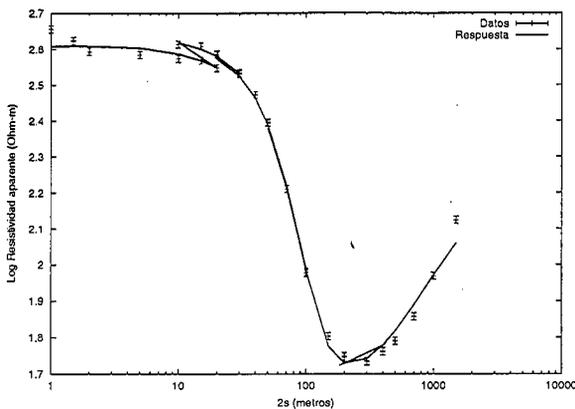


Figura 4.18: Datos y respuesta correspondiente 1D para el sondeo sintético en el sitio 1 del modelo de la figura 4.16.

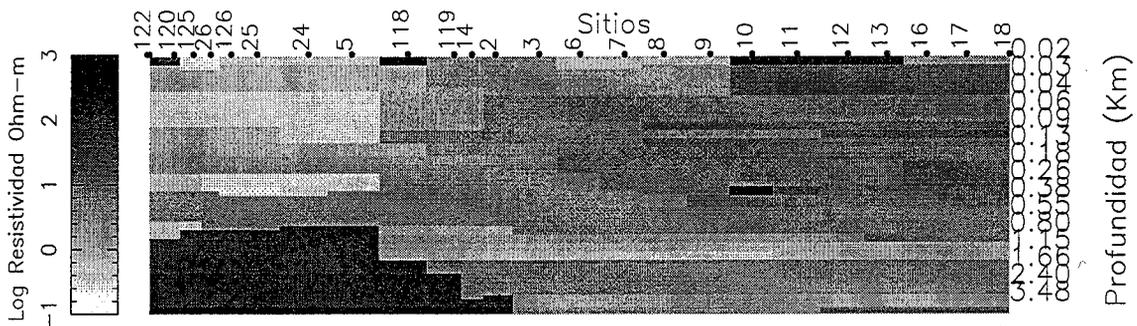


Figura 4.19: Modelos desarrollados para la línea 1 de los datos de Mexicali. La distancia entre los sitios 122 y 18 es de 19.6 km.

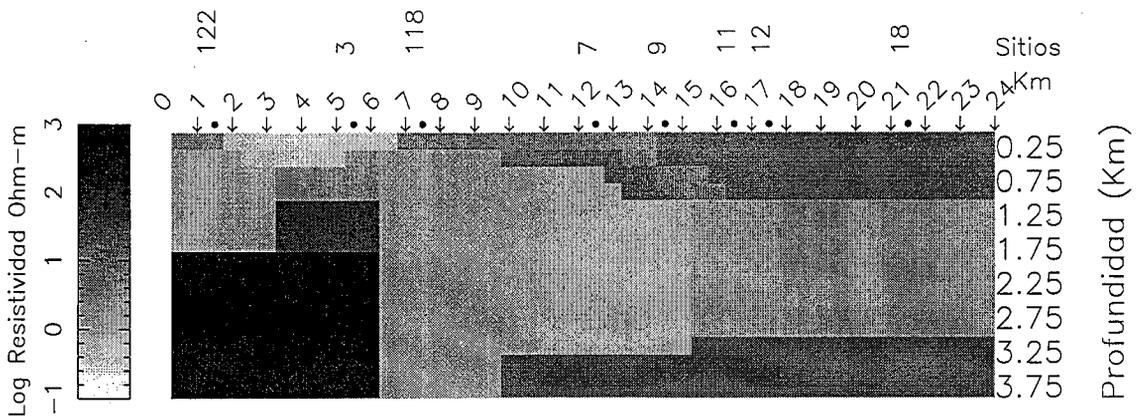


Figura 4.20: Modelos obtenidos para la línea 1 de los datos de Mexicali por Wildt et al.

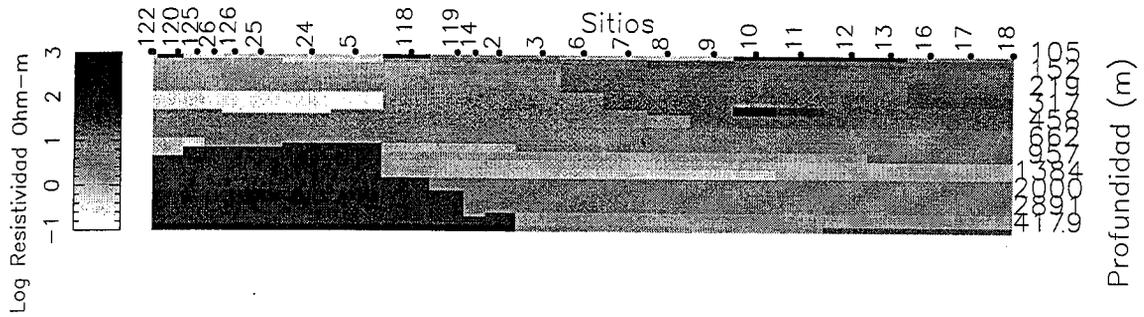


Figura 4.21: Parte inferior del modelo LP de la figura 4.19. El primer sitio del modelo LP se localiza a 1.5 km. del origen del modelo de Wildt et al.

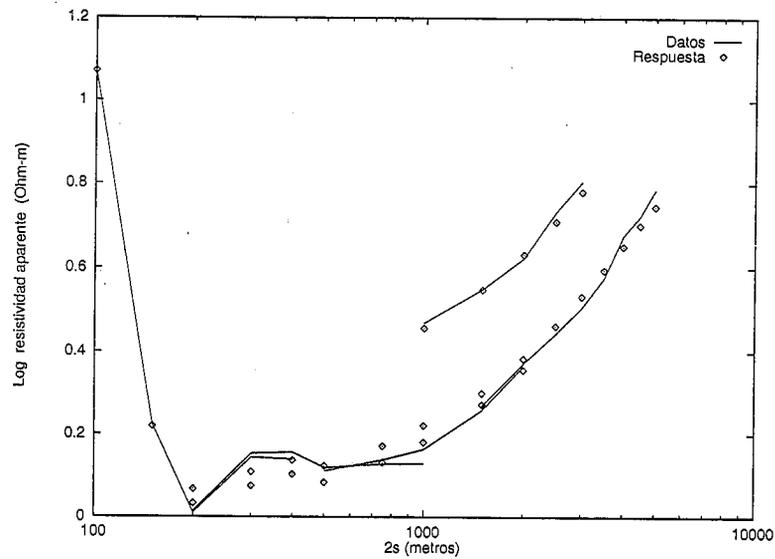


Figura 4.22: Ajuste a los datos del sitio 122, con $RMS = 3.3$. La respuesta corresponde al modelo en ése sitio.

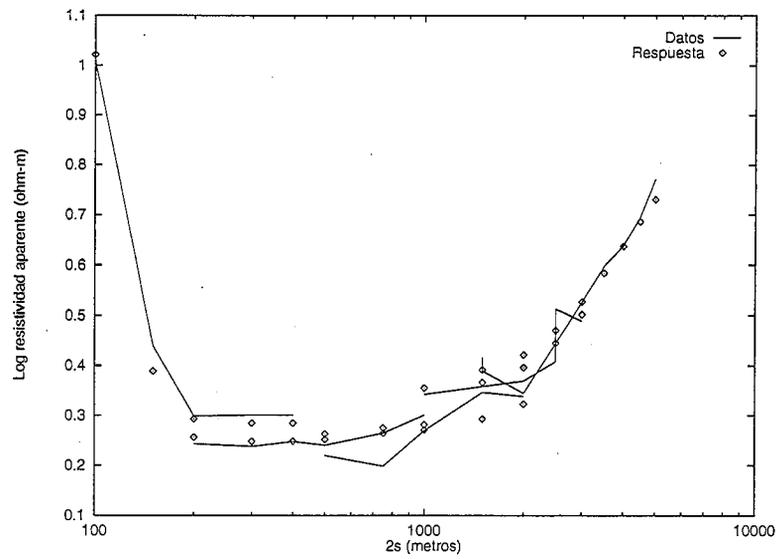


Figura 4.23: Ajuste a los datos del sitio 17, con $RMS = 1.76$. La respuesta es para el modelo en ése sitio.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se desarrollaron algoritmos para la inversión de datos en problemas Geoelectromagnéticos. La aplicación de éstos algoritmos proporciona información sobre la ubicación de discontinuidades en el modelo. Para el diseño de los algoritmos se han aplicado técnicas de relajamiento a los métodos tradicionales, incorporando información a priori como la de posibles estructuras a capas, como las que se encuentran en cuencas sedimentarias. Los algoritmos se probaron con datos generados por programas de simulación en base a modelos conocidos. Los modelos obtenidos con estos datos resultaron muy cercanos al original, y las discontinuidades detectadas también se encontraron muy cerca de las del modelo de prueba. Los algoritmos se probaron también con datos provenientes de sondeos, desarrollando modelos equivalentes a los encontrados por otros métodos, como prueba y error y modelado bidimensional. La ventaja de los metodos presentados es que no se requiere especificar la estructura en detalle, la información a priori que se maneja es la de una cuenca sedimentaria, pero sin especificar el número de capas ni su localización. Los modelos acoplados presentan un rendimiento superior al obtenido por métodos completamente bidimensionales, como occam2.0, en el sentido de recuperar modelos con estructura continua

a trozos para ambientes de tipo cuenca sedimentaria.

Además es posible incluir en el modelado la solución para el problema de desplazamiento por estática, que afecta a los métodos CD y MT. La desventaja principal es la selección de los parámetros principales λ y θ , los cuales se pueden obtener por prueba y error. Para el caso de un perfil se pueden tomar dos sitios vecinos en particular, y realizar pruebas para obtener los parámetros adecuados, los cuales luego se asignan a todos los demás modelos para realizar la inversión conjunta.

Se recomienda emplear el algoritmo local lineal con sobrerelajamiento, para el caso 1D y su versión acoplada para perfiles 2D. En el caso de que la linearización no sea adecuada, se puede intentar con el algoritmo local no-lineal.

Para extender el trabajo se considera la aplicación a problemas bi-dimensionales, para lo que solamente es necesario la implementación del funcional directo dentro del algoritmo. Es probable que se tengan problemas para determinar los parámetros adecuados. Para la selección y desarrollo de los parámetros durante la inversión se pueden emplear redes neuronales para asistir en esta tarea.

Otra posible extensión es el estudio de la relación entre los parámetros del modelo con la exactitud del mismo.

Otras aplicaciones que se pueden considerar para los algoritmos presentados aquí son los sondeos dipolo-dipolo, los sondeos electromagnéticos por acoplamiento entre bobinas y el radar de penetración en subsuelo, entre otros.

Bibliografía

- [1] A. Kaufman, y.G. Keller, *The magnetotelluric sounding method*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1981.
- [2] Cagniard, "Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting", *Geophysics*, 18, pp. 605-635, 1953.
- [3] J. Hadamard *Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations*, Yale University Press, New Haven, 1923.
- [4] I.I. Rokityansky *Geoelectromagnetic investigation of the Earth's crust and mantle*. Springer Verlag, 1982.
- [5] D. W. Marquardt "An algorithm for least-squares estimation for non-linear parameters", *J. SIAM* vol. 11, pp. 431-441, 1963.
- [6] R.A. Wiggins "The general linear inverse problem: implication of surface waves and free oscillations for Earth structure", *Rev. Geophys. Space Phys.*, vol. 10, pp. 251-285, 1972.
- [7] D.L.B. Jupp and K. Vozoff, "Stable iterative methods for the inversion of geophysical data", *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, vol. 42, pp. 957-976, 1975.
- [8] A. Neumaier "Solving ill-conditioned and singular linear systems: a tutorial on Regularization", *SIAM Review*, vol. 40, pp. 636-666, 1998.

- [9] H. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems* Kluwer Academic Publishers, 1996
- [10] K. P. Whittall y D. W. Oldenburg, "Inversion of magnetotelluric data for a one-dimensional conductivity". *Geophysics Mono. Ser.*, Society of Exploration Geophysicists, 1992.
- [11] D. W. Oldenburg, "One-dimensional inversion of natural source magnetotelluric observations", *Geophysics*, vol. 44, pp. 1218-1244, 1978.
- [12] R. L. Parker, "The inverse problem of electrical conductivity in the mantle", *Geophys. J. R. astr. Soc.* 22, pp. 121-138, 1970.
- [13] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations, second edition*, The Jones Hopkins Univ. Press, 1989.
- [14] M. Bertero, C. De Mol, y G. A. Viano, *The stability of inverse problems*, in "Inverse scattering problems in optics", Baltes, ed., Springer, pp. 161-214, 1980.
- [15] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley and Sons, 1969
- [16] C. R. Vogel, y M. E. Oman, "Iterative methods for total variation", *SIAM J. Sci. Comput.* vol. 17, pp. 227-238, 1996.
- [17] U. Tautenhan, "On a general regularization scheme for nonlinear ill-posed problems", *Inverse Problems*, vol. 13, pp. 1427-1437, 1997.
- [18] H. P. Patra y K. Mallick, *Geosounding Principles, 2 Time-Varying Geoelectric Soundings*. Amsterdam: Elsevier, 1980.
- [19] E. Orellana y H. M. Mooney, "Master tables and curves for vertical electrical sounding over layered structures", Madrid Interciencia, 1966.

- [20] O. Koefoed, *Geosounding Principles, 1 Resistivity Sounding Measurements*. Amsterdam: Elsevier, 1979.
- [21] H. K. Johansen, "An interactive computer/graphic-display-terminal system for interpretation of resistivity sounding", *Geophysical Prospecting*, vol 23 pp. 449-458, 1975.
- [22] J.R. Inman "Resistivity inversion with ridge regression", *Geophysics*, vol. 40 no. 5 pp. 798-817, Mayo de 1975.
- [23] J. Rodríguez, *Inversión de sondeos eléctricos mediante redes neuronales* Tesis de maestría en Ciencias en Geofísica Aplicada, CICESE, México, Enero de 1998.
- [24] J. L. Marroquín, *Probabilistic Solution of inverse problems*, Ph.D. thesis, MIT AI Lab, 1985.
- [25] J. L. Marroquín, S. Mitter y T. Poggio, "Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 82, no. 397, marzo de 1987.
- [26] A. Tikhonov, V. Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*. V.H. Winston & Sons, 1977.
- [27] J. M. Morel y S. Solimini, *Variational methods in image segmentation* Birkhäuser, 1994.
- [28] P. Perona y J. Malik, "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion", *IEEE Tran. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, pp. 629-639, 1990.
- [29] D. Mumford, y J. Shah, "Boundary detection by minimizing functionals", *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Francisco, 1985.

- [30] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, y M. Barbaud, "Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging", *IEEE Tran. on Image Processing*, vol. 6, No. 2, pp. 298-311, 1997.
- [31] S. Geman, and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images", *IEEE Tran. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, pp. 721-741, 1984.
- [32] D. Geman, "Random Fields and Inverse Problems in Imaging", en *École d'été de probabilités de Saint-Flour XVIII*, A. Ancona, D. Geman, F. N. Ikeda; editor P. L. Hennekin. Springer Verlag serie Lecture Notes in Mathematics No. 1427, 1990.
- [33] S. Geman, y D. E. McClure, "bayesian image analysis; an application to single photon emission tomography", en *Proc. Statistical Computation Section, Amer. Statistical Assoc.*, Washington DC, pp. 12-18, 1985.
- [34] A. K. Agarwal, H. E. Poll, y J. T. Weaver, "One-and two-dimensional inversion of magnetotelluric data in continental regions", *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 81, nos. 1-4, pp. 155-176, diciembre de 1993.
- [35] R. S. Parr y V. R. S. Hutton, "Magnetotelluric studies in and adjacent to the northumberland basin, northern England", *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 81, nos. 1-4, pp. 43-66, diciembre de 1993.
- [36] Hugo Hidalgo, José Luis Marroquín y E. Gómez-Treviño, "Piecewise smooth models for electromagnetic inverse problems", *IEEE Tran. Geosci. Remote Sensing*, vol. 36, no. 2, pp. 556-561, marzo de 1998.
- [37] Hugo Hidalgo, J. L. Marroquín and E. G. Treviño, "Generating piece-wise continuous models for electromagnetic inverse problems", en *Computational, experimental, and numerical methods for solving ill-posed inverse imaging problems:*

- medical and nonmedical applications*, Proc. of SPIE vol. 3171, pp. 13-20, julio de 1997.
- [38] S.Z. Li, "On discontinuity-adaptive smoothness priors in computer vision," *IEEE Tran. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 17 no. 6 pp. 576-586, junio de 1995.
- [39] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory, Methods of Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier Publishing Company, 1985.
- [40] M. Sen y P. Stoffa, *Global Optimization Methods in Geophysical Inversion* Elsevier Publishing Company, 1995.
- [41] M. Sen, B. Bhattacharya y P. Stoffa, "Nonlinear inversion of resistivity sounding data", *Geophysics*, vol. 58, no. 4, pp. 496-507, abril de 1993.
- [42] M. A. Perez-Flores y A. Schultz, "Bidimensional Magnetotelluric inversion by genetic algorithms", en *American Geophysical Union Fall Meeting*, 1998.
- [43] S. C. Constable, R. L. Parker y C. G. Constable "Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data," *Geophysics*, vol. 52 no. 3, pp. 289-300, marzo de 1987.
- [44] Robert L. Parker, *Geophysical Inverse Theory*, Princeton University Press, 1994.
- [45] J. Besag, "On the statistical analysis of dirty pictures", *J. R. Statist. Soc. B*, vol. 48, no. 3, pp. 259-302, 1986.
- [46] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling y B. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1992.
- [47] E. Gómez-Treviño, "Nonlinear integral equations for electromagnetic inverse problems," *Geophysics*, vol. 52 no. 9 pp. 1297-1302, septiembre de 1987.

- [48] H. Hidalgo, E. Gómez-Treviño, "Application of constructive learning algorithms to the inverse problem." *IEEE Tran. Geosci. Remote Sensing*, vol. 34 no. 4, pp. 874-885, julio de 1996.
- [49] Y. Zhang y K. V. Paulson, "Magnetotelluric inversion using regularized Hopfield neural networks", *Geophysical prospecting*, vol. 45, pp. 725-743, 1997.
- [50] F. Esparza y E. Gómez-Treviño, "1-D inversion of resistivity and induced polarization data for the least number of layers," *Geophysics*, vol. 62, no. 6, pp. 1724-1729, 1997.
- [51] F. J. Esparza y E. Gómez-Treviño, "Inversion of Magnetotelluric soundings using a new integral form of the induction equation," *Geophys. J. Int.*, vol. 127 no. 2 pp. 452-460, noviembre de 1996.
- [52] S. E. Dosso y D. W. Oldenburg, "Linear and non-linear appraisal using extremal models of bounded variation" *Geophys. J. Int.*, vol. 99 no. 3 pp. 483-495, noviembre de 1989.
- [53] D. W. Oldenburg y R. G. Ellis, "Efficient inversion of magnetotelluric data in two dimensions" *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol 81, nos. 1-4 pp. 177-200, diciembre de 1993.
- [54] J. T. Smith y J. R. Booker, "Magnetotelluric inversion for minimum structure", *Geophysics*, vol. 53, no. 12, pp. 1565-1576, diciembre de 1988.
- [55] D. H. Word, H. W. Smith and F. X. Bostick, Jr, *An investigation of the magnetotelluric tensor impedance method*, Tech. Rep. No. 82, Electr. Geophys. Res. Lab., University of Texas, Austin, 1970.
- [56] F. W. Patrick y F.X. Bostick, *Magnetotelluric modelling techniques*, Tech. Rep. No. 59, Electr. Geophys. Res. Lab., University of Texas, Austin, 1969.

- [57] W. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* Academic press, 1977.
- [58] S. Constable, *Occam v2.xx Release Notes* disponible en <http://mahi.ucsd.edu/Steve/Occam/home.html>.
- [59] A.G. Jones y R. Hutton, "A multi-station magnetotelluric study in southern Scotland I. Fieldwork, data analysis and results." *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, vol. 56, pp. 329-349, 1979.
- [60] H. E. Poll, "Automatic forward modelling of two-dimensional problems in electromagnetic induction", Ph.D. thesis, University of Victoria, B.C., Canada, 1994.
- [61] B. K. Sternberg, J. C. Washburne y L. Pellerin, "Correction for Static shift in magnetotellurics using transient electromagnetic soundings." *Geophysics*, vol. 53 no. 11, pp. 1459-1468, noviembre 1988.
- [62] C. deGroot-Hedlin, "Removal of static shift in two dimensions by regularized inversion". *Geophysics*, vol. 56, no. 12, pp. 2102-2106, diciembre 1991.
- [63] C. deGroot-Hedlin y S. Constable, "Occam's inversion and the North American Central Plains electrical anomaly", *J. Geomag. Geoelectr.*, vol. 45, pp. 985-999, 1993.
- [64] A. G. Jones, "Static shift of magnetotelluric data and its removal in a sedimentary basin environment.", *Geophysics*, vol. 53, no. 7, pp. 967-978, julio 1988.
- [65] A. G. Jones, "The COPROD2 dataset: tectonic setting, recorded MT data, and comparison of models.", *J. Geomag. Geoelectr.*, vol 45, pp.933-955, 1993.
- [66] A. Dey y H. F. Morrison, "Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures.", *Geophysical Prospecting*, 27, pp. 106-136, 1979.

- [67] A. Razo, F. Arellano, y H. Fonseca, "Estudios de resistividad realizados por CFE en Cerro Prieto", en *Proc. First symposium on the Cerro Prieto geothermal field, Baja California, Mexico*, San Diego, pp. 167-178, septiembre de 1978.
- [68] M. J. Wilt, N.E. Goldstein y A. Razo, "LBL resistivity studies at Cerro Prieto", en *Proc. First symposium on the Cerro Prieto geothermal field, Baja California, Mexico*, San Diego, pp. 167-178, septiembre de 1978.